Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

DEC 26 1929

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 161

Heft 2

Ausgegeben den 26. November 1929

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Jährlich 4 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 161. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Lerey, Wilhelm, Niels Henrik Abel	65
Hanke, Gerhard, Die Bewegung eines schweren Punktes auf den ungleichachsigen Paraboloiden	78
Späth †, Hans, Der *Weierstraß*sche Vorbereitungssatz	95
Levi, Friedrich, Über repartitive Mengeneigenschaften	101
Dubislav, Walter, Elementarer Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Logik-Kalküls	107
Kommerell, K., Über die Zentralachsen eines Büschels von Dynamen und ihre Beziehung zur Flächentheorie	113
Wernick, Georg, Die Unabhängigkeit des zweiten distributiven Gesetzes von den übrigen Axiomen der Logistik	123
Landau, Edmund, Bestimmung der genauen Konstanten in einem *Kosbe*schen Hilfssatz	135

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Niels Henrik Abel.

Zur hundertsten Wiederkehr seines Todestages.

Von *Wilhelm Lorey* in Leipzig.

Am 6. April 1929 war zum hundertsten Male der Tag wiedergekehrt, an dem im Alter von noch nicht 27 Jahren *Niels Henrik Abel*, durch große Entbehrungen sehr geschwächt, einem schweren Leiden erlag. In Oslo veranstaltete man, wie 1902 bei der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, eine Gedenkfeier, bei der 16 ausländische Mathematiker zu Ehrendoktoren der Philosophie ernannt wurden, unter ihnen auch der Herausgeber dieses Journals.

Neben der persönlichen Ehrung für den jetzigen Redakteur wollte die norwegische Wissenschaft gewiß auch dem Andenken an den Gründer dieses Journals huldigen, der für *Abel* so große fördernde Bedeutung gewonnen hat. Es erscheint daher wohl angebracht, daß das Crellesche Journal im Jahre 1929 einige Worte dem Gedenken an den jung verstorbenen genialen norwegischen Mathematiker widmet, der in den ersten Bänden mit so glänzenden, klassisch zu nennenden Arbeiten vertreten ist.

Abels Beziehungen zu Crelle und dessen Bestreben, dem jungen Freunde in Berlin einen geeigneten Wirkungskreis zu schaffen, soll das Thema dieses Artikels sein, der auf Briefen *Abel*s sowie auf Akten des Berliner Ministeriums für Kunst, Wissenschaft und Volksbildung beruht.

Niels Henrik Abel ist am 5. August 1802 in Finnø als Sohn eines Pastors geboren. Als Schüler der Kathedralschule in Oslo hatte er das Glück, in den oberen Klassen in *Bernt Michael Holmboe* (1795—1850) einen jungen hervorragenden Lehrer der Mathematik zu finden, der bald die geniale Begabung *Abel*s erkannte, durch Privatunterricht ihn förderte und ihn zum Studium von Originalarbeiten veranlaßte. Mit *Newton*s Arithmetica universalis beginnend, steigt der Gymnasiast zu *Euler*, *Lacroix*, *Poisson*, *Gauß*, besonders aber zu *Lagrange* auf. Das Problem der allgemeinen Auflösung der Gleichungen fünften Grades übt seine Anziehungskraft und veranlaßt eine eigene Arbeit, die noch vor Eintritt in die Universität von Osloer Professoren nach Kopenhagen an den dortigen Ordinarius der Mathematik *Degen* (geb. 1766 in Braunschweig, gestorben 1825) zur Aufnahme in die Abhandlungen der dänischen Akademie geschickt wird. *Degen* äußerte sich zwar sehr anerkennend über die mathematischen Kenntnisse des jungen Norwegers, ist aber etwas skeptisch und läßt *Abel* den Rat geben, diese „sterile" Sache lieber zu verlassen und sich dem Studium der elliptischen Funktionen zu widmen, worunter man damals die *Legendre*schen Integrale verstand. Bei diesem Studium gäbe es eine neue Magellan-Straße, die zu einem ungeheueren analytischen Ozean führe.

Wenn *Abel* auch den Rat, die Gleichungen fünften Grades beiseite zu lassen, nicht befolgt hat — er hat den Fehler seiner Jugendarbeit wohl selbst entdeckt —, so dürfte doch der weitere *Degen*sche Rat von entscheidendem Einfluß auf ihn gewesen sein. *Degen* war es auch, der *Abel* von *Crelle* erzählte, als *Abel* auf einer ersten Studienreise 1823 nach Kopenhagen kam. Als er zum zweiten Male 1825 dorthin kam, war *Degen*

gerade gestorben; *Abel* fand aber in dem Mathematiker *von Schwindten* (1799—1831) einen Gönner, der ihm eine Empfehlung an *Crelle* und *Dirksen* in Berlin mitgab. *Abel* reiste über Hamburg, wo er den Astronomen *Schumacher* aufsuchte, den Gründer der seit 1823 erscheinenden Astronomischen Nachrichten, in denen *Abel* später auch einige grundlegende Arbeiten über elliptische Funktionen veröffentlichte, nach Berlin, wo er im Oktober 1825 eintraf und Kupfergraben 4 eine Wohnung bezog, in demselben Hause, in dem der Philosoph *Hegel* wohnte. Der in jenen Jahren für das geistige und staatliche Leben Preußens sehr einflußreiche Philosoph *Hegel* hatte wohl mit der seit der Mitte der zwanziger Jahre in Berlin aufblühenden mathematischen Forschung keine Fühlung, und vielleicht ist gerade dieses wunderbare Aufblühen der Mathematik als eine Reaktion gegen die eigentümlichen philosophischen Verstiegenheiten dieser Tage anzusehen. Freilich war an der Universität, als *Abel* nach Berlin kam, das mathematische Leben noch nicht sehr rege. Als einziger Ordinarius wirkte damals der schon genannte *Dirksen* (1792—1850), ein Schüler von *Gauß* und von ihm empfohlen, der aber einen sehr geringen Lehrerfolg hatte. Als Extraordinarius war mit sehr gutem Lehrerfolg *Martin Ohm* tätig, der aber mit der übrigen Berliner mathematischen Welt kein gutes Verhältnis hatte, wie auch aus dem ersten Brief hervorgeht, den *Abel* von Berlin aus nach Christiania an Professor *Hansteen* schrieb. Er erzählt darin, daß *Crelle* eine mathematische Gesellschaft eingerichtet hatte, die wöchentlich bei ihm tagte, die er aber wegen *Ohms* Verhalten aufgeben mußte. Dieser Brief vom 5. Dezember 1825 bringt eine lebendige Schilderung des ersten Besuches *Abels* bei *Crelle*, der, ein vielbeschäftigter Beamter, den jungen schüchternen Norweger zunächst wohl nicht richtig verstand — er soll ihn als einen Prüfungskandidaten des Baufaches angesehen haben —; als aber *Abel* sich den Mut gefaßt hatte, von seinen mathematischen Studien zu erzählen, wurde *Crelle* sehr aufgeräumt. Es kam gleich eine lange angeregte Unterhaltung über verschiedene mathematische Probleme zustande, so auch über die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades. *Crelle* sprach von dem niedrigen mathematischen Niveau in Deutschland. Er hoffe aber auf Hebung, und als ihm *Abel* seine Verwunderung aussprach, daß es in Deutschland noch nicht wie in Frankreich eine eigene mathematische Zeitschrift gäbe, erklärt ihm *Crelle*, daß er sich schon seit einiger Zeit mit der Absicht trage, eine solche ins Leben zu rufen, und er ist sofort bereit, Arbeiten *Abels* aufzunehmen. So bringt denn auch der erste 1826 erschienene Band des *Crelle*schen Journales schon 7 Arbeiten *Abels*, darunter die über die Gleichungen fünften Grades und über die binomische Reihe. Sie waren wie alle die 12 anderen im Journal veröffentlichten von *Abel* französisch redigiert und von *Crelle* ins Deutsche übertragen worden. *Abel* hat aber offenbar den mündlichen Gebrauch der deutschen Sprache gut gelernt — er macht sich sogar gelegentlich in einem Briefe über den Berliner Dialekt lustig. — Übung in der deutschen Sprache bot ihm der rege Verkehr mit *Crelle*. Jeden Donnerstag fand in *Crelles* Haus ein musikalischer Abend statt, bei dem *Abel*, der nicht musikalisch war, mit jüngeren Leuten über mathematische Dinge sich unterhielt. In diesem Kreise verkehrte auch *Jacobi*, der bis Ostern 1826 als Privatdozent in Berlin tätig war. Jeden Freitag Mittag macht *Abel* mit *Crelle* einen Spaziergang. *Crelle* stellt ihm seine große Bibliothek zur Verfügung und schon sehr bald ist er bemüht, *Abel* an Berlin zu fesseln. Er bot ihm eine Redakteurstelle an, die aber *Abel* ablehnte, weil er auf Grund des ihm von Norwegen verliehenen Stipendiums zunächst eine weitere Studienreise unternahm, die ihn über Freiberg, Dresden, Prag, Wien, Oberitalien nach Paris führte. Überall suchte er Verbindung mit Mathematikern, zumeist auf Grund der warmen Empfehlungsbriefe, die *Crelle* ihm mitgegeben hatte. Sehr gern kehrte er aber noch einmal

nach Berlin zurück, ohne, wie ursprünglich geplant, *Gauß* in Göttingen aufzusuchen. Erst am 20. Mai 1827 traf er wieder in Oslo ein. Ein Jahr später beginnen die amtlichen Bestrebungen *Crelles*, *Abel* in Berlin einen Wirkungskreis zu eröffnen. *Crelle* war ja seit 1828, obwohl offiziell dem Ministerium des Innern als Geheimer Baurat angehörend, mathematischer Berater des Kultusministeriums und als solcher beauftragt worden, zu dem Plan der Errichtung eines Polytechnischen Institutes in Berlin sich zu äußern. Er hatte wohl damals schon die Möglichkeit ins Auge gefaßt, *Abel* an diesem Institut eine Stelle zu verschaffen. Er benutzt aber vorher schon bei einer Eingabe vom 14. Mai 1828 an den Minister, in der er um weitere Unterstützung für sein Journal bittet, die Gelegenheit, auf *Abel* aufmerksam zu machen.

Das Journal hat in der Tat bei den Mathematikern eine ganz ungemeine Teilnahme gefunden und die bedeutendsten Geometer haben dasselbe, selbst unaufgefordert, mit ihren Arbeiten beehrt. Es hat auch schon in der kurzen Zeit seines Bestehens in der Tat manchen guten Erfolg gehabt und zur Erweiterung und Bereicherung der Wissenschaft wesentlich beigetragen. So z. B. ist die Abhandlung Nr. 8 im ersten Band „Über die Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höherem Grade als dem vierten allgemein aufzulösen", von Herrn *Abel*, einem jungen Norweger und vielleicht einem der ersten jetzt existierenden Talente für die höhere Mathematik, der leider nur in seinem Vaterlande fast übersehen wird, und gegen ungünstige Verhältnisse kämpft, für die noch so dunkle Theorie der höheren Gleichungen ungemein wichtig. Die Abhandlung Nr. 12 im zweiten Bande „Über die elliptischen Funktionen" von demselben Verfasser, deren Fortsetzung soeben im nächsten Heft erscheint, war gleichsam der Anfang der Untersuchungen über diesen jetzt wichtigen Teil der Analysis, der jetzt so eifrig betrieben wird, und der u. a. durch Herrn *Jacobi* in Königsberg nach *Legendres* eigenem Geständniß weitergebracht worden ist. Sie trug zuerst dazu bei, diese Untersuchungen anzuregen und zu beleben. Die Fortsetzung der Abhandlung des Herrn *Abel* rückt sie aber schon von neuem noch weiter und es stehen Untersuchungen des nämlichen Geometers über diesen Gegenstand bevor, die ihn fast erschöpfen dürften.

Der Minister antwortete *Crelle* mit einem Schreiben vom 7. Juni 1828, in dem es heißt:

Das äußerst günstige Urtheil, welches Ew. in Ihrem Schreiben über das ausgezeichnete Talent des Herrn *Abel* für die höhere Mathematik und über seine bisherigen Leistungen ausgesprochen haben, veranlaßt mich zu dem Wunsch, diesen jungen Gelehrten dem diesseitigen Staatsdienst zuführen zu können. Da indessen für den Augenblick keine Gelegenheit vorhanden ist, ihm eine bestimmte Stelle anzutragen, so würden Sie mich verpflichten, wenn Sie gefl. übernehmen wollten, zu erforschen, ob er geneigt sein möchte, gegen Zusicherung einer angemessenen jährlichen Remuneration als Privat-Docent bei der hiesigen Universität in Wirksamkeit zu treten.

Crelle antwortete darauf am 21. Juni 1828:

Nicht minder hat mich die gewogentliche Rücksicht geehrt und erfreut, welche Eure Excellenz auf die in meinem ganz gehorsamsten Vortrag vom 14. v. M. enthaltenen Bemerkung den Herrn *Abel* zu Christiania in Norwegen betreffend, zu nehmen geruht haben. Der Erwerb dieses Mannes für den diesseitigen Staatsdienst nach Eurer Excellenz gnädiger Absicht würde gewiß ein Gewinn für den Dienst und die Wissenschaft sein, und ich freue mich darauf, daß der Staat und die Wissenschaft Ew. Excellenz diese neue Acquisition zu verdanken haben werden. Ich habe sogleich durch einen Brief die Neigung des Herrn *Abel* als Privat-Docent bei der hiesigen Universität sich hierher zu begeben, zu erforschen gesucht, ohne dabei wie ich thun zu müssen glaubte, meine Autorisation zu der Frage für jetzt näher zu bezeichnen. Ich werde die Ehre haben, Ew. Excellenz von der Antwort, die ich baldigst erwarte, sogleich untertänigste Anzeige zu machen.

Abel, der in sehr bedrängter Lage in der Nähe von Froland in jener Zeit sich aufhielt, wurde durch die Aussichten, die *Crelle* ihm eröffnete, naturgemäß in sehr freudige Stimmung versetzt. Um so härter traf ihm am 20. Juli 1928 ein mit „Leider" beginnendes Schreiben vom 11. d. M. mit der Nachricht, daß ein anderer „wie vom Himmel gefallen" seine Rechte geltend mache und daß *Crelle* daher vorerst nichts für *Abel* unternehmen werde, weil er zur Zeit dadurch ihm mehr schaden als nutzen kann, zumal auch der Mi-

nister für längere Zeit abwesend sei. Wer dieser Konkurrent war, ist nicht bekannt. *Abel* schreibt in einem Brief vom 21. Juli 1828 an Frau Hansteen, aus dem man allein etwas über diese unerwartete Schwierigkeit weiß:

Hvem denne anden er skriver ikke *Crelle*, og jeg kjender ingen af den Caliber.

Es verging noch ein halbes Jahr, bis *Crelle* in einer besonders denkwürdigen Eingabe den Antrag auf *Abels* Berufung stellte:

Ew. Excellenz haben auf Anlaß meines ganz gehorsamsten Berichts vom 14. May d. J., den ich über den Fortgang des Journals für die reine und angewandte Mathematik zu erstatten mich beehrte, und in welchem ich der erfolgreichen Bemühungen einiger ausgezeichneter Mitarbeiter an demselben gedachte, und bei dieser Gelegenheit von dem Talente einiger, auch um das Journal sich bemühenden jungen Mathematiker sprach, die gnädigste Absicht zu fassen geruhet, den Herrn *Abel* zu Christiania in Norwegen, welcher zu Jenen gehört, dem diesseitigen Staatsdienste zuzuführen, und mich durch das hohe Rescript vom 7. Juny d. J. beauftragt, zu erforschen, ob er geneigt sein möchte, gegen Zusicherung einer angemessenen jährlichen Remuneration, als Privat-Docent bei der hiesigen Königlichen Universität in Wirksamkeit zu treten.

Dieses habe ich, mit strenger Beobachtung angemessener und schuldiger Discretion, getan und zu meinem Vergnügen vernommen, daß Herr *Abel* völlig geneigt und bereit ist, als Privat-Docent bei der hiesigen Universität sich in den diesseitigen Dienst zu begeben. Er hat gegen mich vertraulich geäußert, daß er zwar durchaus keine großen Ansprüche mache, jedoch, weil er ganz ohne Vermögen, und durch seine Studien selbst in einige Schulden gekommen sei, auch noch zum Teil für Geschwister zu sorgen habe, (er ist einer der Söhne eines unbemittelten evangelischen Pfarrers) wünschen müsse, im Anfang wenigstens nicht unter 500 Thlr., und womöglich 600 Thlr. jährlich, auch außerdem einiges Reisegeld, etwa im Betrage eines vierteljährlichen Gehaltes, zu erhalten. So ausgestattet, würde er sehr gern seinen dortigen Aufenthalt, wo seine Subsistenz nur erst für einige Zeit, durch die Anstellung als Privat-Docent bei der dortigen Universität und durch das Vicariat für Herrn Professor *Hansteen* während dessen Reise nach Sibirien, keineswegs aber für die Folge gesichert sei, alsbald verlassen, und vorzugsweise gern hierher kommen, weil es ihm bei seinem früheren längeren Aufenthalte hierselbst, und auf einer Reise, die er in den Jahren 1825, 26 und 27 durch Deutschland, Frankreich und Italien gemacht hat, nicht entgangen sei, daß jetzt von dem erlauchten Preußischen Gouvernement die Wissenschaften mehr und kräftiger beschützt und befördert werden, als irgendwo.

Die Gelegenheit und die Aussicht, den Herrn *Abel* für die diesseitigen Dienste zu gewinnen, ist also vorhanden, und die Wissenschaft wird Ew. Excellenz durch die Heranziehung dieses ausgezeichneten Talents einen neuen Gewinn verdanken.

Ich habe nur noch den Wunsch hinzuzufügen, daß Ew. Excellenz geruhen möchten, die Erwerbung des Herrn *Abel* gewogentlichst möglichst bald in Ausführung bringen zu lassen, weil es sonst möglich wäre, daß man ihn, jetzt aufmerksam gemacht auf sein großes Talent, anderswo zu fixieren suchte. In der Tat soll, wie ich zufällig vernommen, von einem Plane die Rede sein, ihn für Copenhagen zu gewinnen, wodurch er also alsdann vielleicht dem hiesigen Dienste entzogen werden könnte.

Ich freue mich, Ew. Excellenz zugleich noch ein neues gewichtiges Zeugnis der ausgezeichneten Qualifikation des Herrn *Abel* vorlegen zu können. Herr *Legendre* zu Paris nemlich hat sich in einem, durch die Arbeiten der Herren *Jacobi* und *Abel* veranlaßten Schreiben an den Königlichen Kammerherrn, Herrn Baron *Alexander von Humboldt*, auch über Herrn *Abel* auf eine Weise geäußert, die diesem ebenso sehr zum Ruhme gereicht, als dem ehrwürdigen Veteran, der das Schreiben verfaßte, zur Ehre. Mit Erlaubnis des Herrn p. Baron *von Humboldt*, der, vermöge seines unschätzbaren, eines so erhabenen Gelehrten würdigen Eifers, für alles, was die Wissenschaft fördern kann, sich interessierend, die Unterstützung und Prosperität auch des Herrn *Abel* angelegentlich wünscht, beehre ich mich, Ew. Excellenz eine Abschrift des besagten Schreibens des Herrn *Legendre*, in welchem sich von einem der geehrtesten jetzt lebenden Mathematiker und dem Urheber gerade desjenigen Teiles der Wissenschaft (der Theorie der elliptischen Funktion), in welchem Herr Abel ebenfalls sich ausgezeichnet hat, also von dem competentesten Richter, das Urteil über die Talente dieses jungen Mannes auf die bestimmteste und unzweideutigste Weise ausgesprochen findet, anliegend ganz gehorsamst zu überreichen, so daß also jetzt, wie ich glaube, die ausgezeichnete Qualifikation des Herrn *Abel* außer allem Zweifel gesetzt sein dürfte.

Die Herren *Dirichlet*, *Abel*, *Jacobi* und *Steiner*, von welchen der erste und die beiden letzten schon im Preußischen Staate sich befinden, bilden in der Tat eine Vereinigung von jungen Mathe-

matikern, aus welcher dieser Wissenschaft die schönsten Hoffnungen aufblühen, und vielleicht einst Geometer vom ersten Range hervorgehen können, denn so jung sie sind, verdankt ihnen schon die Wissenschaft wesentliche Erweiterungen. Der Preußische Staat nahm einst die verdientesten Mathematiker ihrer Zeit, *Euler*, *Lagrange*, *Lambert* etc. auf und gewährte ihnen, was sie in anderen Ländern nicht fanden, eine ehrenvolle Stellung, in welcher sie über die Wissenschaft, wie sie sie fanden, und über ihre Zeit sich emporschwingen konnten, welches vielleicht ohne diesen würdigen Schutz nicht geschehen wäre. Der Preußische Staat wird auch jetzt von Neuem Talente unterstützen, wie die Natur sie nur selten hervorbringt, und Ew. Excellenz Fürsorge wird die Wissenschaft dieses verdanken.

Ich meinerseits darf mich also auch der meinem Eifer für meine Wissenschaft so erfreulichen Hoffnung überlassen, hier in meinem Vaterlande eine Epoche für die Mathematik beginnen zu sehen, die einst vielleicht in der Geschichte der Wissenschaft ruhmvoll neben der früheren Zeit wird genannt werden.

Genehmigen Ew Excellenz den Ausdruck unbegrenzter Hochachtung und tiefster Ehrfurcht, womit ich zu beharren die Ehre habe

Ew. Excellenz
ganz gehorsamster Diener
gez. *Crelle.*

Berlin, den 28. Dezember 1828.

Drei Monate später wiederholt *Crelle* dringend den Antrag auf *Abel*s Berufung nach Berlin unterm besondern Hinweis auf die von Paris ausgegangenen Anregungen, *Abel* einen Ruf nach Stockholm zu verschaffen. Er schreibt:

Ew. Exzellenz

habe ich in Folge des hohen Rescripts vom 14. May v. J., durch welches Höchstdieselben mir den Auftrag zu ertheilen geruhten, zu erforschen, ob Herr *Abel* zu Christiania in Norwegen, der sich als Mathematiker in so hohem Grade ausgezeichnet hat, geneigt sei, als Privat-Docent bei der hiesigen Universität in Wirksamkeit zu treten, unterm 28. December v. J. ganz gehorsamst zu berichten, die Ehre gehabt, daß sich Herr *Abel* gegen mich dazu geneigt erklärt habe.

Ich legte meinem ganz gehorsamsten Berichte, mit Genehmigung des Herrn Baron *Alex. von Humboldt* Abschrift eines Schreibens des Herrn *Legendre* zu Paris an den Herrn p. *v. Humboldt* bei, in welchem von jenem berühmten Mathematiker von Neuem das ehrenvollste Urtheil über die ausgezeichneten Talente des Herrn *Abel* auf das bestimmteste ausgesprochen wird, und beehrte mich die Bitte hinzuzufügen, daß Ew. Exzellenz geruhen möchten, die Herziehung des Herrn *Abel* in die diesseitigen Dienste, um so mehr möglichst bald gewogentlichst zu verfügen, weil, wie ich damals vernommen hatte,von einem Plane die Rede war, ihn für Copenhagen zu gewinnen, wodurch er den diesseitigen Diensten leicht entzogen werden könne.

Ich halte es für Pflicht, Ew. Exzellenz ganz gehorsamst anzuzeigen, daß ich vor Kurzem von einem anderen Plane bestimmte Nachricht erhalten habe, Herrn *Abel* nach Stockholm zu ziehen, dessen Ausführung sehr wahrscheinlich, und von welchem also zu fürchten ist, daß Herr *Abel* dann wirklich den diesseitigen Diensten entgegen möchte.

Es schreibt mir nemlich Herr *Legendre* zu Paris am 15. Februar ds. Js. daß er, nebst dreien seiner Collegen, An Se. Majestät den König von Schweden geschrieben und gebeten habe, Herrn *Abel* in die Academie, nach Stockholm zu berufen. Ich beehre mich, das Schreiben des Herrn *Legendre* im Original beizulegen, mit der untertänigsten Bitte um Zurückgabe.

Da der Brief gerade an der Stelle, auf der dritten Seite, die von Herrn *Abel* spricht, zufälliger Weise beschädigt und deshalb die Stelle, obgleich noch ziemlich zu entziffern, nur mit einiger Schwierigkeit lesbar ist, so setze ich sie, wie sie gewesen sein dürfte, der leichtern Übersicht wegen hier her.

Herr *Legendre* schreibt:

„J'ai appris par Mr. *Dorow*, que Mr. *Jacobi* se trouve placé convenablement dans l'université de Königsberg, ce qui me fait grand plaisir. Je voudrais qu'il en fut de même de Mr. *Abel*. J'avois, de concert avec trois de mes confrères, hazardé d'écrire au Roi de Suède, pour l'engager d'appeler à Stockholm, près de l'académie un savant (oder sujet) si éminemment distingué. Je n'ai point eu encore de réponse, mais (diese Stelle ist fast unlesbar) la bonne volonté que nous avoit témoignée Mr. l'ambassadeur."

Herr *Legendre* fügt noch hinzu:

„Mais d'aprés ce que m'a marqué Mr. *d'Humboldt*, il seroit peut être plus avantageux à Mr. *Abel*, d'être appelé à Berlin pour entrer dans le séminaire, que l'on veut établir pour les hautes

mathématiques et la physique. On ne pourroit faire un meilleur choix et je désire bien vivement que ce projet se réalise."

Übrigens enthält der Brief von Neuem noch andere ehrenvolle Äußerungen über Herrn *Abels* Arbeiten, und ich bitte deshalb, denselben gnädigst durchzusehen.

Da nun von der Verwendung französischer Academiker bei des Königs von Schweden Majestät, für einen schwedischen (sic!) Eingeborenen der beabsichtigte Erfolg nur zu wahrscheinlich sein dürfte, so scheint mir zu fürchten, daß Herr *Abel* wirklich dem diesseitigen Dienste entgehen möchte, wenn nicht der Ruf hier her der dortigen Anstellung zuvorkommt.

Überzeugt von der seltenen Auszeichnung des jungen Mannes, die jetzt schon von allen Seiten die vollste Anerkennung findet, und folglich wünschend, daß ein so seltenes Talent meinem Vaterlande zugeführt werden möge, wage ich daher die Bitte, daß Ew. Exzellenz geruhen möchten, Herrn *Abel* recht bald hierher berufen zu lassen, gehorsamst zu wiederholen. Er hat damals in seinen Äußerungen gegen mich für den Anfang nur einen geringen Gehalt, nemlich nicht unter 500, womöglich 600 jährlich, nebst einigem Reisegelde, etwa im Betrage eines vierteljährlichen Gehalts, gewünscht, für welchen Betrag also dieser außerordentliche Mann jetzt noch dem diesseitigen Dienste zuzuführen sein würde.

Zu dem obigen Grunde, aus welchem die Beschleunigung des Rufs zu wünschen sein möchte, kommt noch ein anderer, nicht weniger dringender Grund. Herr *Abel* ist nemlich schon seit längerer Zeit bedeutend krank und war es nach dem jüngsten Briefe (vom 8. v. M.), der mir Nachricht von seinem Befinden gab, so sehr, daß er nicht mehr selbst zu schreiben im Stande war. Er leidet schon länger an Schwäche der Brust, und jetzt in seiner Krankheit, die ihn obendrein auf dem Lande, 50 Meilen nördlich von Christiania, befallen hat, an Bluthusten. Es ist ihm also, auch dieses Zustandes wegen, eine baldige Verbesserung der Aussichten in seine Zukunft, die bisher so ungünstig waren, und für die Erhaltung und Befestigung seiner Gesundheit überhaupt, namentlich eine baldige Versetzung in ein milderes Clima zu wünschen.

Alles vereinigt sich also, den Wunsch, Herrn *Abel* bald hierher versetzt zu sehen, recht dringend zu machen, und ich wage es, Ew. Exzellenz denselben untertänigst vorzulegen. Einestheils kann dieser Mann vielleicht nur jetzt noch für die diesseitigen Dienste gewonnen, anderntheils vielleicht überhaupt nur noch auf solche Weise der Wissenschaft erhalten werden und geht vielleicht für dieselbe bald ganz verloren, wenn er in dortiger Gegend oder gar in seiner bisherigen Lage bleiben muß.

gez. *Crelle.*

Berlin, den 2. April 1829.

Crelle hat diesmal beim Minister Erfolg. Aber es war zu spät: Am 7. Mai 1829 muß er mit folgendem Schreiben dem Minister *Abels* Tod melden:

Ew. Excellenz

haben zufolge des auf meinen ganz gehorsamsten Bericht vom 14. May v. J. erlassenen hohen Rescripts vom 7. Juny v. J. die Absicht gehabt, den Privat-Docenten an der Universität zu Christiania in Norwegen, Herrn *N. H. Abel*, welcher sich, obgleich noch jung an Jahren, als Mathematiker schon in hohem Grade ausgezeichnet hat, dem hiesigen Staatsdienste zuzuführen, und dadurch seine Bestrebungen zu ermuntern. Wie ich vernommen, haben Ew. Excellenz jetzt infolge meines ferneren ganz gehorsamsten Berichts vom 2. April d. J. beschlossen, diese Absicht auszuführen und Herrn *Abel* nunmehr hierher berufen zu lassen.

Leider habe ich jetzt ganz gehorsamst zu berichten, daß Herr *Abel* der Wissenschaft durch den Tod entrissen ist. Ich beehre mich, mit unterthänigster Bitte um Rückgabe, das Schreiben des Herrn Professor *Maschmann* zu Christiania, welches diese Meldung mit einigen näheren Umständen enthält, ganz gehorsamst zu überreichen. Doppelt traurig ist der frühzeitige Hintritt des Herrn *Abel* dadurch, daß er, wie das Schreiben des Herrn *Maschmann* andeutet, nicht allein seinen wissenschaftlichen Anstrengungen, sondern auch zum Theil den Bemühungen sich seinen ferneren Unterhalt zu verschaffen, wegen dessen man ihn dort in Sorge gelassen hat, zum Opfer geworden ist. — Der traurige Todesfall hat mich tief erschüttert und wird Alle betrüben, denen die seltenen Gaben und die Achtbarkeit des Verstorbenen bekannt waren.

Herr *Abel* war nach meiner lebendigsten Überzeugung, und wie es die in der letzten Zeit von allen Seiten ihm gewordenen Anerkennung bestätiget, eines der größten Genies für die Mathematik, die jetzt existieren und die vielleicht je da waren. Obgleich noch im Beginn seiner Laufbahn, hat er schon die Wissenschaft wesentlich erweitert. Sein seltener Geist drang in ihre unerforschten Tiefen und schwang sich auf Höhen, die bis dahin noch nicht erreicht waren, und es ist kaum abzusehen, wieviel ihm die Wissenschaft noch würde zu verdanken bekommen haben, wenn er länger gelebt hätte.

Dabei war seine liebenswürdige Bescheidenheit und die Reinheit seines Charakters nicht minder achtenswerth wie sein Talent. Er war eine jener seltenen Erscheinungen, wie sie die Natur kaum in Jahrhunderten einmal für die Wissenschaft hervorbringt. Sein Verlust ist unersetzlich.

Ew. Excellenz, der Sie so gern schon gut gemeinte Bestrebungen und um so mehr das Verdienst zu würdigen geruhen, bitte ich unterthänigst, gewogentlich noch aussprechen zu wollen, daß jetzt beschlossen gewesen sei, Herrn *Abel* in Anerkennung seines ausgezeichneten Talents und seiner Verdienste um die Wissenschaft, in sofern er es gewünscht hätte, hierselbst ehrenvoll und mit Auszeichnung anzustellen, und mir zugleich zu erlauben, daß ich solches dem Publico in der Nachricht, die ich demselben über den Verstorbenen im Journal der Mathematik und sonst in öffentlichen Blättern zu geben gedenke, sagen dürfe, damit auch diese Anerkennung sein Andenken ehren möge.

gez. *Crelle.*

Berlin, den 7. May 1829.

Auf die Nachricht vom Tode *Abels* schreibt der Minister am 16. Mai 1829 an *Crelle*:

Mit schmerzlicher Teilnahme habe ich aus Ew. gefälligem Schreiben vom 7. d. M. ersehen, daß die von mir genährte Hoffnung, den Herrn *Abel* für den diesseitigen Königlichen Staatsdienst zu gewinnen, nunmehr durch seinen am 6. v. M. erfolgten Tod vereitelt ist. Auf Ew. unter dem 2. v. M. gemachten Antrag hatte ich bereits beschlossen, den Herrn *Abel* vorläufig unter Zusicherung einer jährlichen fixierten Remuneration von 600 Thalern und eines angemessenen Reisegeldes mittels Ew. hierher zu berufen und ihm bei der hiesigen Universität einen angemessenen Wirkungskreis zu eröffnen. Die diesbezügliche Verordnung würde Ew. in diesen Tagen erhalten haben. Sie ist nunmehr überflüssig geworden, was ich um so mehr bedauere, je lebhafter ich den Eintritt des Herrn *Abel* in den diesseitigen Staatsdienst wegen seiner ausgezeichneten Leistungen und der großen Erwartungen wünschte, zu welchen sein seltenes Talent mich berechtigte. Es entspricht übrigens ganz meinen Wünschen, daß Ew. in der öffentlichen Nachricht, die Sie über den Verstorbenen in Ihrem Journal zu geben beabsichtigen, auch meines Beschlusses, ihm in Anerkennung seines ausgezeichneten Talentes und seiner Verdienste um die Wissenschaft einen ehrenvollen Wirkungskreis bei den hiesigen wissenschaftlichen Anstalten, insofern er es gewünscht hätte, geben zu wollen, auf eine des Verstorbenen ehrende Weise zu gedenken.

Es ist beachtenswert, daß in diesem Schreiben des Ministers nicht allein von der Universität, sondern von den „wissenschaftlichen Anstalten" gesprochen wird. Gedacht ist wohl an das „Polytechnische Institut" (nach *Legendres* Bezeichnung (S. 69 f.) „Seminar für höhere Mathematik und Physik"). In den Akten dieses Instituts, die durch einen Brief des Chemikers *Mitscherlich* vom 6. Januar 1828 eröffnet werden und mit dem 16. Juni 1835 schließen, erscheint *Abels* Name noch einmal im Jahre 1834 in einem Briefe *Jacobis* an den Minister, in dem er für *Steiners* Anstellung an dem zu gründenden polytechnischen Institut eintritt. Der Brief schließt mit den Worten:

Wenn der im Vorstehenden gegen Euer Excellenz ausgesprochenen Wunsch bei mir eine besondere Lebhaftigkeit erlangt hat, so ist dies wohl mit veranlaßt durch die Erinnerung an den unlängst verstorbenen *Abel*. Er war nie Mitglied einer Universität, einer Akademie; eine von ihm der Pariser Akademie überreichte Entdeckung war so groß, daß sie von derselben unverstanden und unbeachtet blieb. Als hernach seine im Crelleschen mathematischen Journal publizierten Arbeiten, die diesem Journal einen unvergeßlichen Wert gesichert haben, größere Aufmerksamkeit auf sich zogen, wurde zwar von ihr seine Entdeckung wieder hervorgezogen, ihm der große mathematische Preis zuerkannt, der König von Schweden aufgefordert, die Stockholmer Akademie durch ihn zu zieren; auch sicherte ein Ruf nach Berlin ihm zwar eine notdürftige, doch ausreichende Existenz, aber alles dies traf den bereits Verstorbenen. Den Toten aber hilft die Ehre nichts, die den Lebendigen bestimmt ist.

In diesem Jahrhundert hat man in Oslo *Abel* ein eigentümliches Denkmal gesetzt. Es trägt nur den Namen *Abel*, ohne jede Erläuterung, weil der Bildhauer *Vigeland*, wie ich höre, von dem Gedanken ausging, daß jeder Norweger wisse, wer *Abel* war. In seiner „Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert" kommt *Felix Klein*, nachdem er eingehend *Abels* Arbeiten charakterisiert hat, auch auf dieses Denkmal zu sprechen. (Bd. 1, S. 108.) Er sagt:

Ich möchte mich von diesem idealen Typ eines Forschers, wie ihn die Geschichte der Wissenschaft nur selten aufzuweisen hat, nicht trennen, ohne an eine Gestalt aus einer anderen Sphäre zu erinnern, die ihm trotz der weitgetrennten Betätigungsgebiete verwandt erscheint. *Abel* teilte mit vielen Mathematikern das Schicksal eines völligen Mangels an musikalischer Begabung; dennoch meine ich etwas Richtiges zu sagen, wenn ich seine Art der Produktivität und seine Persönlichkeit mit *Mozart* vergleiche. So müßte man diesem gottbegnadeten Mathematiker ein Denkmal errichten, wie es für Mozart in Wien geschehen ist: Mozart, selbst schlicht und unansehnlich, steht lauschend da, umschwebt von zierlichen Genien, die ihm seine Eingebungen aus einer anderen Welt wie spielend zutragen.

Ich kann es mir nicht versagen, bei dieser Gelegenheit an das ganz anders geartete Denkmal zu erinnern, das statt dessen für *Abel* in Kristiania errichtet wurde und das jeden, der seine Natur kennt, schwer enttäuschen muß. Auf einem hochragenden steilen Granitblock schreitet ein jugendlicher Athlet von Byronschem Typus über zwei gräuliche Opfer hinweg in die Höhe. Kann man den Helden allenfalls noch als Symbol des menschlichen Geistes auffassen, so fragt man sich vergeblich nach der tieferen Bedeutung dieser Ungeheuer. Sind es die besiegten Gleichungen fünften Grades oder die elliptischen Funktionen? Oder Kummer und Sorge des täglichen Lebens? Der Sockel des Denkmals trägt in riesigen Lettern die Inschrift ABEL.

Zur hundertsten Wiederkehr des Todestages hat die norwegische Postverwaltung Briefmarken herausgegeben, die das bekannte Bild *Abels* zeigen.

Die im Vorstehenden auf *Abels* Berufung nach Berlin sich beziehenden Aktenstücke, die ich im Archiv des Berliner Ministeriums für Kunst, Wissenschaft und Volksbildung gefunden habe (Akten betreffend den Geh. Baurat Crelle und Akten wegen eines in Berlin zu gründenden Polytechnischen Instituts), habe ich zum erstenmal wörtlich und vollständig in der Gedenknummer der „Norsk Matematisk Tidsskrift“ 11. Aergang 1929, S. 2—13 veröffentlicht; einige Stellen auch schon in meiner Abhandlung „Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts“, Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die internationale mathematische Unterrichtskommission, Imuk III, 9, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1916; des weiteren auch einiges in dem Artikel „August Leopold Crelle zum Gedächtnis“, dieses Journal Bd. 157 (1926), S. 1—11.

In der genannten Nummer der Norsk Mat. Tidsskrift bringt *Fr. Lange-Nielsen* einen Artikel „Abel og Académie des sciences“ i Paris“ a. a. O. S. 13—17. Es sei auch auf desselben Verfassers Vortrag im Norwegischen Mathematischen Verein „Zur Geschichte des Abelschen Theorems. Das Schicksal der Pariser Abhandlung“ hingewiesen, Norsk Matematisk Tidsskrift 9. Aergang 1927, S. 1—19.

Die Briefe *Abels* stehen in der auf Beschluß des norwegischen Parlamentes veröffentlichten Gedenkschrift „Niels Henrik Abel. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Kristiania, Paris, London, Leipzig.“ Darin u. a. von *Elling-Holst* „Introduction historique“, aus der ich einige Angaben entnommen habe, ebenso wie aus *C. A. Bjerknes*, „Niels Henrik Abel. Sa vie et son action scientifique“. Eine neue Ausgabe dieser 1880 zunächst in einer skandinavischen Zeitschrift und dann stark vermehrt in französischer Sprache veröffentlichten Biographie hat *V. Bjerknes* 1929 in norwegischer Sprache besorgt; Oslo, H. Aschehoug et Co.

Der auf Seite 2 erwähnte Berliner Mathematiker *Martin Ohm* ist 1792 in Erlangen geboren. Wesentlich Autodidakt wurde er 1821 Privatdozent in Berlin, erhielt 1824 ein Extraordinariat und 1829 ein Ordinariat. Er starb 1872 (nicht 1862, wie irrtümlich im Mémorial S. 116 steht). Als er 1864 vom Lehramt zurücktrat, wurde *Weierstraß* sein Nachfolger im Ordinariat. Über die recht guten Ideen *Martin Ohms* für die Organisation des mathematischen Studiums vgl. meine oben genannte Imukabhandlung S. 31—36, sowie einen in der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1915 gehaltenen Vortrag; Berichte der Berl. Math. Ges. 15. Jahrg. (1916). In seiner Abhandlung „Gauß und die Variationsrechnung“ spricht *Bolza* sehr ausführlich und mit großer Anerkennung von *Martin Ohms* systematisch durchgeführter und auf Doppelintegrale angewandter Methode der Variationen der Grenzen; Gauß Werke X, 2. Abhandlung, 5, S. 7—10. *Felix Klein* hebt in seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“ (3. Aufl. 1924, Bd. 1, S. 82) hervor, daß *Martin Ohm* bei der Einführung der imaginären Zahlen deutlich das *Princip der Erweiterung des Zahlbereiches* ausspricht.

Leipzig, September 1929.

Eingegangen im September 1929.

Die Bewegung eines schweren Punktes auf den ungleichachsigen Paraboloiden.

Von *Gerhard Hanke* in Gießen.

Nachdem *Weierstraß* die Bedeutung der konjugierten Punkte bei den Extremumsaufgaben der Variationsrechnung in strenger und vollständiger Weise erkannt und entwickelt hatte, konnte es lange Zeit zweifelhaft erscheinen, ob hier nicht nur wie manchmal in der Mathematik eine allgemeine Theorie entwickelt wäre, die zu interessanten Beispielen unfähig oder nur in trivialer Weise anwendbar ist. Lange Zeit war die lange vor *Weierstraß* von *L. Lindelöf* gegebene Konstruktion der konjugierten Punkte auf der Kettenlinie als dem Meridian der kleinsten Rotationsfläche das einzige interessante Beispiel. In einer Reihe von Breslauer Dissertationen, z. B. *Koschmieder*, *Kober*, *Lindemann* [1]), sind dann zuerst in weiterem Umfange andere Beispiele durchgearbeitet worden, und besonders *Kober* und *Lindemann* haben Methoden entwickelt, die innerhalb eines gewissen Aufgabenkreises als allgemein betrachtet werden können. Endlich hat im Jahre 1926 Herr *Kneser* [2]) allgemeine Kriterien für das Auftreten oder Nichtauftreten konjugierter Punkte angegeben, die auf den ganzen Kreis derjenigen Aufgaben anwendbar sind, die in der Variationsrechnung seit alter Zeit vorzugsweise behandelt werden, weil sie auf Quadraturen führen; es sind die Aufgaben, die in der üblichen Bezeichnung

$$\delta \int f(y, p)\, dx = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

geschrieben werden, sowie die isoperimetrischen Aufgaben von der Form

$$\delta \int f(y, p)\, dx = 0, \quad \delta \int g(y, p)\, dx = 0,$$

wobei das zweite Integral die isoperimetrische Bedingung formuliert. Wesentlich ist hier, daß eine der beiden Variablen x und y unter dem Integralzeichen bei dem Integral, dessen Extremum gesucht wird, sowie bei demjenigen, das die isoperimetrische Bedingung ausspricht, nicht vorkommt. Daneben kennt man seit *Jacobi* noch einen weiteren Typus von Aufgaben der Variationsrechnung, die auf Quadraturen führen; es sind diejenigen, bei denen in der *Jacobi-Hamilton*schen Differentialgleichung eine Trennung der Variablen möglich ist, ohne daß eine derselben in dem betrachteten Integral fehlt. Unter diesen wiederum sind die wichtigsten und bisher am meisten behandelten dahin zu charakterisieren, daß in ihnen die geodätische Linie einer *Liouville*schen Fläche gesucht wird; es sind die Aufgaben

$$\delta \int \sqrt{f(x) + g(y)}\ \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0,$$

die bekanntlich die Quadratur

[1]) *L. Koschmieder,* Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Bestimmung konjugierter Punkte bei Problemen der Variationsrechnung, Diss. Breslau 1913; *H. Kober*, Konjugierte kinetische Brennpunkte, Diss. Breslau 1910; *C. Lindemann*, Konjugierte Punkte bei Widerstandsaufgaben der Variationsrechnung, Diss. Breslau 1917.

[2]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, math.-phys. Klasse, 1926, S. 142.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)+c}} = \int \frac{dy}{\sqrt{g(y)-c}}$$

gestatten.

Zu diesem Typus gehören auch die in vorliegender Arbeit behandelten Aufgaben. Wir zeigen zunächst, daß auch bei diesem allgemeinen Typus, ähnlich wie bei dem von Herrn *Kneser* an der angeführten Stelle behandelten, allgemeine Kriterien für das Auftreten konjugierter Punkte gültig sind. Da aber spezielle Aufgaben dieser Art hinsichtlich des Auftretens konjugierter Punkte bisher so gut wie garnicht bearbeitet sind, so scheint es lohnend, an einer speziellen mechanischen Aufgabe die einschlägigen Verhältnisse zu untersuchen. Es handelt sich um die Bewegung eines schweren Punktes auf den ungleichachsigen Paraboloiden, also um das Problem

$$\delta \int \sqrt{U+h}\, ds = 0.$$

Diese Aufgabe bietet auch insofern besonderes Interesse dar, als bei ihr die Extremalen durch hyperelliptische Funktionen darstellbar sind, die bisher nur bei einer geringen Anzahl von Aufgaben geometrischer und mechanischer Art angewandt worden sind. Wir haben in vorliegender Arbeit die Bewegung eines schweren Punktes auf dem elliptischen Paraboloid in dem Falle, daß die Schwerkraft in der Richtung der positiven x-Achse wirkt, behandelt. Man übersieht ohne weiteres, daß bei dem hyperbolischen Paraboloid ganz analoge Betrachtungen zum Ziele führen.

§ 1. Allgemeines Kriterium für das Auftreten konjugierter Punkte.

Wir beginnen also mit einer allgemeinen Untersuchung über die konjugierten Punkte auf den geodätischen Linien *Liouville*scher Flächen [1]).

Sei das Linienelement einer Fläche, auf der x, y die *Gauß*schen Koordinaten sind, durch eine Gleichung

$$ds^2 = (f(x)+g(y))\,(dx^2+dy^2)$$

definiert. Dann kann man die Gleichung der geodätischen Linie, die vom Punkte x_0, y_0 ausgeht, in der Form

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\sqrt{f(x)+c}} \pm \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{\sqrt{g(y)-c}} = 0$$

schreiben [2]); die Quadratwurzeln seien, soweit sie reell sind, immer positiv genommen, c sei eine Integrationskonstante, X, Y die laufenden Koordinaten eines Punktes der betrachteten geodätischen Linie. Seien nun α_1 und α_2 zwei aufeinanderfolgende Wurzeln der Gleichung $f(x)+c=0$, zwischen denen die Größe $f(x)+c>0$ ist, sei demgemäß vorausgesetzt

$$(1) \qquad \alpha_1 > \alpha_2, \quad f'(\alpha_2) > 0, \quad f'(\alpha_1) < 0.$$

Zwischen α_1 und α_2 liege ein einziger Wert γ, für welchen

$$f'(\gamma) = 0, \quad \alpha_2 < \gamma < \alpha_1.$$

Analog seien β_1 und β_2 zwei aufeinanderfolgende Wurzeln der Gleichung $g(y)-c=0$; dabei sei $\beta_1 > \beta_2$.

---

[1]) Die Entwicklungen dieses Paragraphen sind aus dem Breslauer mathematischen Seminar hervorgegangen.

[2]) *A. Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1925, S. 49.

Die betrachtete geodätische Linie verlaufe nun in dem Viereck, das von den Kurven $x = \alpha_1, x = \alpha_2$ und $y = \beta_1, y = \beta_2$ gebildet wird, die beim Zusammentreffen mit der geodätischen Linie von dieser berührt werden; die Differentialgleichung der geodätischen Linie

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{g(y) - c}{f(x) + c}$$

gibt offenbar $dx = 0$ für $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$, ebenso $dy = 0$ für $y = \beta_1$ und $y = \beta_2$, woraus die Berührung ersichtlich wird.

Gehen wir nun vom Punkte x_0, y_0 die geodätische Linie entlang, so werde von den Seiten des bezeichneten krummlinigen Vierecks etwa zuerst die Seite $x = \alpha_1$ berührt; im weiteren Fortgang der Kurve kommt man dann entweder zunächst zur Berührung mit der Kurve $x = \alpha_2$ oder zuerst zur Berührung mit einer der Kurven $y = \beta_1$, $y = \beta_2$. Diese Fälle wollen wir als I und II unterscheiden.

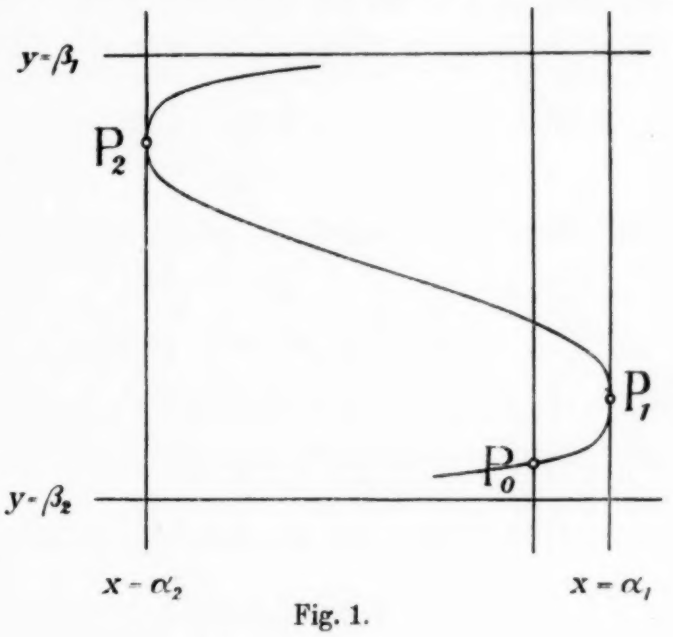

Fig. 1.

Im Falle I verläuft die Kurve etwa nach dem Schema der Figur 1, in der natürlich die Fläche auf eine gewöhnliche xy-Ebene abgebildet ist. Die Berührungspunkte mit den Viereckseiten $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$ seien P_1 und P_2. $P_0(x_0, y_0)$ sei der Ausgangspunkt, in welchem wir $\frac{dy}{dx} > 0$ annehmen wollen. Dann läßt sich zeigen, *daß zum Punkte P_0 auf dem Bogen P_1P_2 immer ein konjugierter Punkt vorhanden ist.*

Zum Beweise gehen wir davon aus, daß auf dem Bogen P_0P_1 die Gleichung der geodätischen Linie lautet

$$J_1 \equiv \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + c}} - \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{\sqrt{g(y) - c}} = 0;$$

die zwei Wurzeln wechseln ja ihr Zeichen nur, wenn eine der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen verschwindet. Auf dem Bogen P_1P_2 ist die Quadratwurzel $\sqrt{f(x) + c}$ negativ zu nehmen. Wir haben daher für diesen Bogen die Gleichung

$$J_2 \equiv \int_{x_0}^{\alpha_1} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + c}} - \int_{\alpha_1}^{X} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + c}} - \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{\sqrt{g(y) - c}} = 0.$$

Man hat diese Gleichungen, um konjugierte Punkte zu P_0 zu finden, d. h. Berührungspunkte mit der Enveloppe der durch Änderung von c entstehenden Schar, zu kombinieren bzw. mit den Gleichungen

$$\frac{\partial J_1}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial c} = 0. \tag{2}$$

Um diese Gleichungen diskutieren zu können, schicken wir einen Hilfssatz voraus. Es sei im besonderen $\gamma < X < \alpha_1$, dann kann man, da auf der Integrationsstrecke $X \ldots \alpha_1$ die Größe $f'(x)$ nach unseren Voraussetzungen nicht verschwindet, in folgender Weise transformieren

$$(3)\qquad \int_{\alpha_1}^{X}\frac{dx}{\sqrt{f(x)+c}}=\int_{0}^{U}\frac{du}{f'(x)\sqrt{u}}\,,$$

$$u=f(x)+c,\quad U=f(X)+c.$$

Dann wird x unter dem Integralzeichen rechts als Funktion von u und c aufzufassen sein, und es gelten die Gleichungen

$$(4)\qquad f'(x)\frac{\partial x}{\partial c}+1=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial c}=1.$$

Jetzt kann man die rechte Seite der Gleichung (3) nach c differenzieren; daß das Integral an der Grenze $u=0$ integrierbar unendlich wird, hindert nicht die Anwendbarkeit der gewöhnlichen Regel für das Differenzieren unter dem Integralzeichen [1]). Auf diese Weise findet man unter Berücksichtigung der Gleichungen (4)

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_{0}^{U}\frac{du}{f'(x)\sqrt{u}}=\frac{1}{f'(X)\sqrt{U}}+\int_{0}^{U}\frac{f''(x)\,du}{(f'(x))^3\sqrt{u}}$$

oder, indem man wieder x als Variable einführt,

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial c}\int_{\alpha_1}^{X}\frac{dx}{\sqrt{f(x)+c}}=\frac{1}{f'(X)\sqrt{f(X)+c}}+\int_{\alpha_1}^{X}\frac{f''(x)\,dx}{(f'(x))^2\sqrt{f(x)+c}}\,.$$

Die Transformation der Variablen u und x ineinander ist erlaubt, da $f'(x)$ auf der betrachteten Integrationsstrecke von Null verschieden und, wie wir selbstverständlich annehmen, endlich und stetig ist.

Jetzt bilden wir die erste der Gleichungen (2) und finden sofort

$$(6)\qquad \frac{\partial J_1}{\partial c}=-\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{2\sqrt{f(x)+c}^3}-\int_{y_0}^{Y}\frac{dy}{2\sqrt{g(y)-c}^3}<0;$$

auf dem Bogen P_0P_1 liegt also kein zu P_0 konjugierter Punkt.

Für den Bogen P_1P_2 zerlegen wir die Größe J_2, indem wir einen beliebigen, von c unabhängigen Wert γ_0 durch die Ungleichung

$$\gamma<\gamma_0<\alpha_1$$

charakterisieren. Wenn zunächst $X<\gamma_0$, dann setzen wir

$$J_2=\int_{x_0}^{\gamma_0}+\int_{\gamma_0}^{\alpha_1}-\int_{\alpha_1}^{\gamma_0}-\int_{\gamma_0}^{X}-\int_{y_0}^{Y}\frac{dy}{\sqrt{g(y)-c}};$$

offenbar kann man auch schreiben

$$J_2=\int_{x_0}^{\gamma_0}+2\int_{\gamma_0}^{\alpha_1}-\int_{\gamma_0}^{X}-\int_{y_0}^{Y}\frac{dy}{\sqrt{g(y)-c}}\,,$$

wobei unter den leeren Integralzeichen beider Gleichungen immer

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)+c}}$$

zu ergänzen ist. Dann gibt der Hilfssatz (5), angewandt auf das zweite Glied des letzten Ausdruckes J_2, in dem γ_0 für X gesetzt werden kann,

---

[1]) *Schlömilchs* Kompendium, Bd. I, Braunschweig 1923, S. 484.

$$(7)\qquad \frac{\partial J_2}{\partial c} = -\int_{x_0}^{\gamma_0} \frac{dx}{2\sqrt{f(x)+c^3}} - \frac{2}{f'(\gamma_0)\sqrt{f(\gamma_0)+c}}$$
$$+ 2\int_{\gamma_0}^{\alpha_1} \frac{f''(x)\,dx}{(f'(x))^2\sqrt{f(x)+c}} + \int_{\gamma_0}^{X} \frac{dx}{2\sqrt{f(x)+c^3}} - \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{2\sqrt{g(y)-c^3}}.$$

Jetzt sei zweitens

$$(8)\qquad \alpha_1 > X > \gamma_0 > \gamma;$$

dann zerlegen wir

$$J_2 = \int_{x_0}^{\gamma_0} + \int_{\gamma_0}^{\alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{X} - \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{\sqrt{g(y)-c}},$$

indem die leeren Integralzeichen wie oben zu verstehen sind. Wir wenden den Hilfssatz (5) auf die beiden mittleren Integrale an, in denen seine Veraussetzungen nach (8) erfüllt sind, und finden

$$(9)\qquad \frac{\partial J_2}{\partial c} = -\int_{x_0}^{\gamma_0} \frac{dx}{2\sqrt{f(x)+c^3}} - \frac{1}{f'(\gamma_0)\sqrt{f(\gamma_0)+c}}$$
$$+ \int_{\gamma_0}^{\alpha_1} \frac{f''(x)\,dx}{(f'(x))^2\sqrt{f(x)+c}} - \frac{1}{f'(X)\sqrt{f(X)+c}} + \int_{X}^{\alpha_1} \frac{f''(x)\,dx}{(f'(x))^2\sqrt{f(x)+c}} - \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{2\sqrt{g(y)-c^3}}.$$

Jetzt ist alles zur endgültigen Diskussion vorbereitet. Die Gleichung (6) gibt unmittelbar

$$\lim_{X=\alpha_1-0} \frac{\partial J_1}{\partial c} = -\infty,$$

die Gleichung (9) gibt bei Berücksichtigung der Beziehungen (1) durch Betrachtung des vierten Gliedes der rechten Seite

$$\lim_{X=\alpha_1-0} \frac{\partial J_2}{\partial c} = +\infty.$$

Ebenso gibt die Gleichung (7) durch Betrachtung des vierten Gliedes der rechten Seite, da hier $\gamma_0 > X$ und die Quadratwurzel positiv ist,

$$(10)\qquad \lim_{X=\alpha_2+0} \frac{\partial J_2}{\partial c} = -\infty.$$

Aus den letzten beiden Ergebnissen folgt aber, daß zwischen den Stellen $X = \alpha_1 - 0$ und $X = \alpha_2 + 0$ eine Stelle liegt, für welche

$$\frac{\partial J_2}{\partial c} = 0,$$

also ein zum Punkte P_0 konjugierter Punkt.

Fassen wir die Größen $\partial J_1/\partial c$ und $\partial J_2/\partial c$ als die Erscheinungsform einer Größe Φ auf, die wir längs der geodätischen Linie von P_0 ausgehend bilden, und die für jeden Punkt außer P_1 und P_2 endlich und eindeutig bestimmt ist, so können wir sagen, die Größe Φ springt an der Stelle P_1 von $-\infty$ zu $+\infty$ um und erreicht an der Stelle P_2 den Wert $-\infty$, verschwindet also mindestens einmal auf dem Bogen P_1P_2.

Diese ganze Entwicklung bezog sich auf den oben bezeichneten Fall I. Aber der Fall II, durch Figur 2 gekennzeichnet, läßt sich sofort auch erledigen, wir brauchen nur in der durchgeführten Betrachtung den Grenzübergang zu dem Werte $\alpha_2 + 0$ zu ersetzen

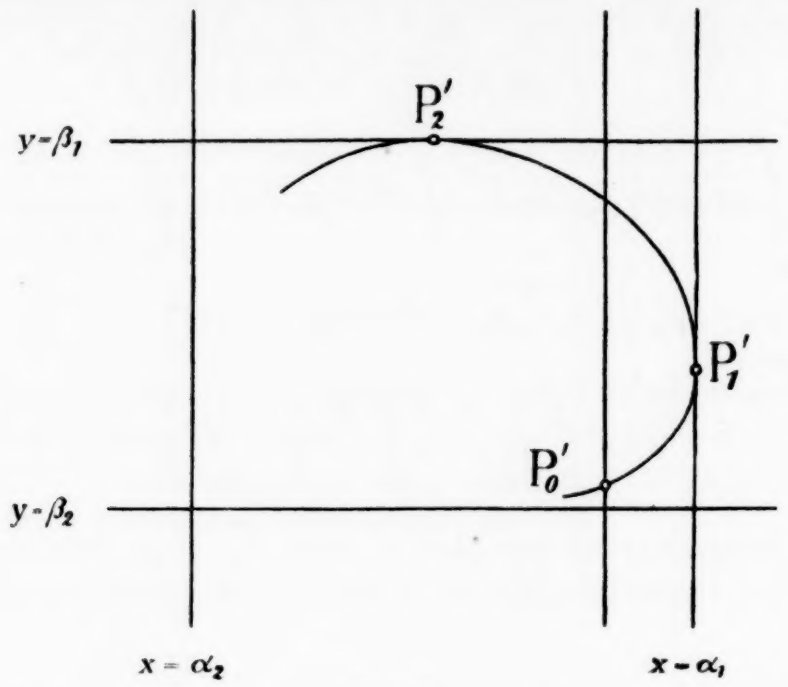

Fig. 2.

durch den zur Stelle $\beta_1 - 0$, dann wird in dem Ausdruck (7) das mit dem Buchstaben y behaftete Glied unendlich, und wir bekommen an Stelle der Gleichung (10)

$$\lim_{Y=\beta_1-0} \frac{\partial J_2}{\partial c} = -\infty;$$

das unendliche Glied ist ja jetzt

$$-\int_{y_0}^{\beta_1} \frac{dy}{2\sqrt{g(y)-c^3}},$$

da die Gleichung $g(\beta_1) - c = 0$ gilt. Die Folgerung, daß zwischen den Punkten P_1' und P_2' ein zu P_0' konjugierter Punkt auftritt, bleibt dieselbe wie vorher; auch im Falle II ist das Auftreten eines solchen bei den geltenden sehr allgemeinen Voraussetzungen gesichert.

Hiermit ist ein erstes, sehr allgemeines Kriterium für das Auftreten konjugierter Punkte abgeleitet und zwar für eine Klasse von Aufgaben der Variationsrechnung, die nicht zu dem gewöhnlich behandelten Typus derer gehören, bei welchen eine der Variablen unter dem Integralzeichen fehlt. Auf diese Weise werden die von Herrn *Kneser* in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie gegebenen Resultate weitergeführt.

Diese Ergebnisse sind natürlich auch bei Problemen der dynamischen Stabilität, d. h. wenn man die Bahnkurve eines Punktes als Extremum eines Integrals der kleinsten Wirkung auffaßt, anwendbar, vorausgesetzt, daß sich das Wirkungselement in die Form $\sqrt{(f(x)+g(y))(dx^2+dy^2)}$ bringen läßt. Das ist der Fall bei unserer speziellen Aufgabe, der wir uns nun zuwenden wollen.

§ 2. Die Extremalen auf dem elliptischen Paraboloid.

Das Variationsproblem

$$\delta\int\sqrt{U+h}\,ds = 0, \quad U = gx$$

mit der Nebenbedingung

$$\frac{y^2}{a^2+\lambda} + \frac{z^2}{b^2+\lambda} + 2x - \lambda = 0, \tag{11}$$

$$a^2 > b^2,$$

wobei x, y, z rechtwinklige Koordinaten sind, g die Beschleunigung der Schwere bedeutet und h eine Konstante ist, führt bekanntlich auf Quadraturen, wenn man parabolische Koordinaten einführt. Betrachtet man Gleichung (11) als Gleichung mit der Unbekannten λ und bezeichnet ihre drei reellen Wurzeln mit u, v, w, so ist, falls man

$$u > v > w$$

annimmt,

$$-\infty < w < -a^2 < v < -b^2 < u < +\infty. \tag{12}$$

Für die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und das Bogenelement ds ergeben sich dann folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} 2x &= u + v + w + a^2 + b^2, \\ y^2 &= \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{b^2-a^2}, \\ z^2 &= \frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{a^2-b^2} \end{aligned} \tag{13}$$

und

$$\begin{aligned} ds^2 = &\frac{(u-v)(u-w)}{4(a^2+u)(b^2+u)}\,du^2 + \frac{(v-w)(v-u)}{4(a^2+v)(b^2+v)}\,dv^2 \\ &+ \frac{(w-u)(w-v)}{4(a^2+w)(b^2+w)}\,dw^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Im Falle $u = \text{const.}$ erhalten wir ein elliptisches Paraboloid, das in der Richtung der negativen x-Achse in das Unendliche geht, im Falle $v = \text{const.}$ ein hyperbolisches Paraboloid und im Falle $w = \text{const.}$ ein elliptisches Paraboloid, das sich in der Richtung wachsender x in das Unendliche erstreckt.

Im ersten Falle, auf den wir uns hier beschränken wollen, wird

$$U + h = \frac{g}{2}(v + w + c), \tag{15}$$

wenn man

$$u + a^2 + b^2 + \frac{2h}{g} = c$$

setzt, und unsere Aufgabe lautet

$$\delta \int \sqrt{f_1(v_1) + f_2(w_1)} \quad \sqrt{dv_1^2 + dw_1^2} = 0; \tag{16}$$

dabei ist also infolge der Gleichungen (14) und (15)

$$\begin{aligned} dv_1^2 &= \frac{(v-u)\,dv^2}{4(a^2+v)(b^2+v)}, \\ dw_1^2 &= \frac{(u-w)\,dw^2}{4(a^2+w)(b^2+w)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_1(v_1) &= \quad v^2 + cv, \\ f_2(w_1) &= -(w^2 + cw). \end{aligned}$$

Aus Gleichung (16) folgt nun die Differentialgleichung

$$\pm \frac{dv_1}{\sqrt{f_1(v_1) + C}} = \pm \frac{dw_1}{\sqrt{f_2(w_1) - C}}$$

bzw., falls wir beide Seiten der Gleichung durch $d\tau$ bezeichnen,

$$(17)\qquad d\tau = \frac{(v-u)\,dv}{2\,\varepsilon_1\sqrt{(v+a^2)\,(v+b^2)\,(v-u)\,(v^2+cv+C)}} = \frac{(w-u)\,dw}{-2\,\varepsilon_2\sqrt{(w+a^2)\,(w+b^2)\,(w-u)\,(w^2+cw+C)}},$$

sodaß man als Gleichung der Bahnkurve

$$(18)\qquad \int_{v_0}^{v} \frac{(v-u)\,dv}{\varepsilon_1\sqrt{(v+a^2)\,(v+b^2)\,(v-u)\,(v^2+cv+C)}} + \int_{w_0}^{w} \frac{(w-u)\,dw}{\varepsilon_2\sqrt{(w+a^2)\,(w+b^2)\,(w-u)\,(w^2+cw+C)}} = 0$$

erhält; es ist $\varepsilon_k = \pm 1$, die Größe C eine Integrationskonstante und v_0, w_0 das Koordinatenpaar des Ausgangspunktes der Extremalen. Man überzeugt sich leicht, daß die Linien $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ die Krümmungslinien des Paraboloids sind. Aus Realitätsgründen muß nun

$$(19)\qquad \begin{aligned} v^2 + cv + C &> 0, \\ w^2 + cw + C &< 0 \end{aligned}$$

sein. Es seien l_1 und l_2 die Wurzeln der Gleichung

$$v^2 + cv + C = 0,$$

sodaß also

$$(20)\qquad \left.\begin{matrix} l_1 \\ l_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - C}$$

ist; dann fordern die Ungleichungen (19)

$$\begin{aligned} (v-l_1)\,(v-l_2) &> 0, \\ (w-l_1)\,(w-l_2) &< 0. \end{aligned}$$

Da aber $l_1 > l_2$ angenommen ist, so lassen sich diese Ungleichungen nur befriedigen, wenn

$$(21)\qquad l_2 < w < l_1 < v$$

ist. Ferner muß, damit die Größen l_1 und l_2 negativ reell ausfallen, infolge der Gleichungen (20) und der daraus resultierenden

$$(22)\qquad \begin{aligned} l_1 + l_2 &= -c, \\ l_1 l_2 &= C \\ c &> 0 \end{aligned}$$

und

$$a^2 b^2 \leqq C \leqq \frac{c^2}{4}$$

sein. Die erste Bedingung ist von selbst erfüllt, da die Realität des Bewegungsvorganges

$$U + h > 0,$$

d. h. aber nach (15)

$$c > -(v+w)$$

verlangt. Die Beziehungen (12) und (21) liefern drei verschiedene Bewegungstypen

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\text{I.} && l_2 < w < -a^2 < l_1 < v < -b^2 < u, \\ &\text{II.} && l_2 < w < l_1 < -a^2 < v < -b^2 < u, \\ &\text{III.} && l_2 < w < l_1 = -a^2 < v < -b^2 < u. \end{aligned}$$

Es ist möglich, nach dem Muster von *C. Neumann* [1]) eine Gleichung zu entwickeln, die gestattet, aus gegebenen Anfangsbedingungen auf die Art der Bewegung zu schließen.

Im ersten Falle [2]) geht die Bewegung in einem Krümmungslinien-Viereck vor sich. Dieses wird von der Linie $w = l_2$ und den beiden Ästen der Linie $v = l_1$ gebildet, liegt also symmetrisch zum Scheitel des Paraboloids. Die Extremale berührt die eben genannten Krümmungslinien, während die Hauptschnitte $v = -b^2$ und $w = -a^2$ unter von Null verschiedenen Winkeln durchschnitten werden. In den Grenzfällen $l_1 = -b^2$ und $l_2 = -a^2$ pendelt der schwere Punkt auf besagten Hauptschnitten, ohne im letzten Falle die Höhe der Nabelpunkte zu erreichen.

Ist $l_1 < -a^2$ (vgl. (23) II), so umwindet die Bahnkurve das Paraboloid, indem sie abwechselnd die Linien $w = l_1$ und $w = l_2$ berührt, und fällt, wenn $l_1 = l_2$ ist, mit der Krümmungslinie $w = l_1 = l_2$ zusammen.

Im Falle III endlich reduzieren sich die hyperelliptischen Integrale 1. Gattung auf elliptische 3. Gattung. Es findet eine Berührung der Extremalen mit der Parameterlinie $w = l_2$ statt, und der Hauptschnitt $w = -a^2$ bzw. $v = -a^2$ wird in den beiden Nabelpunkten und nur in diesen von der Bahnkurve geschnitten.

§ 3. Diskussion der konjugierten Punkte.

Wir behandeln im folgenden den Bewegungstypus, der durch die Ungleichungen

$$l_2 \leqq w \leqq -a^2 < l_1 \leqq v \leqq -b^2$$

charakterisiert ist [3]).

Nach Gleichung (18) lautet die Gleichung der Bahnkurve

$$\varepsilon_1 \int_{v_0}^{v} F(v)\,dv + \varepsilon_2 \int_{w_0}^{w} F(w)\,dw = 0, \tag{24}$$

wobei

$$F(\xi) = \frac{u - \xi}{\sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)(\xi - u)(\xi - l_1)(\xi - l_2)}} > 0$$

gesetzt ist. Die Koordinaten der Punkte P_0, B_1, P_1, P_2 und B_2 in Figur 3 [4]) seien bzw. (v_0, w_0), (v_1, l_2), $(-b^2, w_1)$, $(v_2, -a^2)$ und (l_1, w_2). Bezeichnen wir den Bogen P_0B_1 der Extremalen mit I, den Bogen B_1P_1 mit II, den Bogen P_1P_2 mit III und den Bogen P_2B_2 mit IV, setzen wir ferner fest, daß auf I $\varepsilon_1 = +1$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{auf I:} \quad & \varepsilon_1 = +1, \ \varepsilon_2 = +1, \\
\text{auf II:} \quad & \varepsilon_1 = +1, \ \varepsilon_2 = -1, \\
\text{auf III:} \quad & \varepsilon_1 = -1, \ \varepsilon_2 = -1, \\
\text{auf IV:} \quad & \varepsilon_1 = -1, \ \varepsilon_2 = +1,
\end{aligned}$$

und es ergibt sich nach (24) als Gleichung der Bahnkurve

---

[1]) *C. Neumann*, De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur, Crelles Journal, Bd. **56**, S. 56 ff.

[2]) Eine ausführliche Diskussion findet sich bei *M. A. de Saint-Germain*, Mouvement d'un point pesant sur un paraboloide, Liouvilles Journal, 3. Serie, Bd. **3**, S. 401 ff.

[3]) Eine besondere Behandlung ist trotz des § 1 deswegen notwendig, weil bei unserer speziellen Aufgabe die *Gauß*schen Koordinaten v und w die Punkte des Paraboloids nicht eindeutig festlegen und dadurch Voraussetzungen geschaffen werden, die in den Entwicklungen des § 1 nicht berücksichtigt sind.

[4]) Daß die Extremale in der in Figur 3 angedeuteten Weise verläuft, d. h. daß auf eine Berührung mit der Parameterlinie $w = l_2$ eine solche mit der Parameterlinie $v = l_1$ folgen muß, ersieht man aus Betrachtungen, die man nach dem Vorbilde von *de Saint-Germain*, loc. cit., S. 408 anstellen kann.

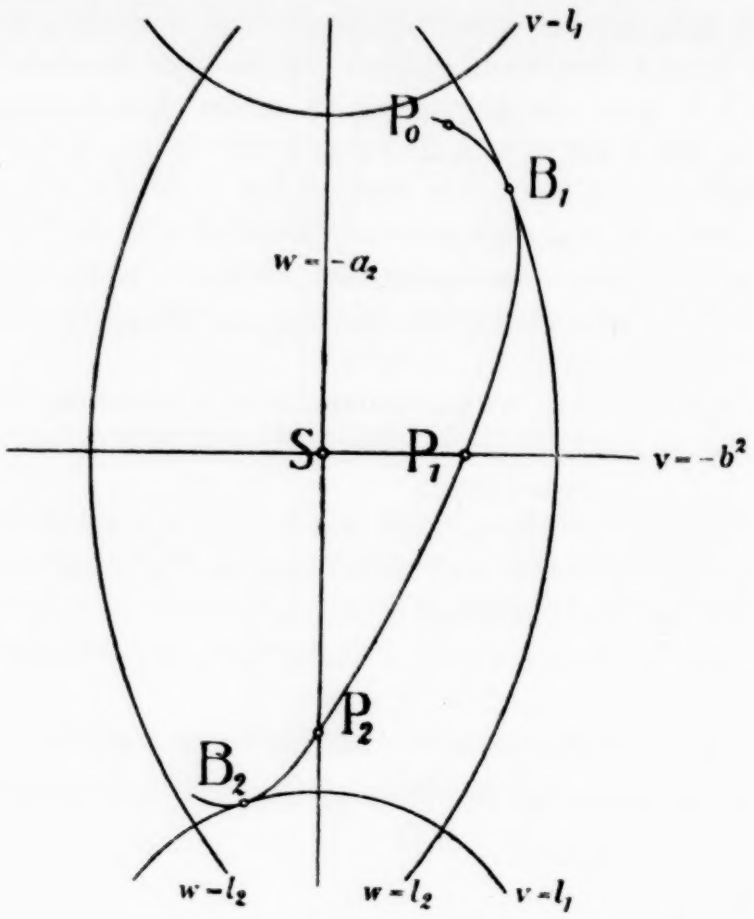

Fig. 3.

auf I:

$$J_{\mathrm{I}} \equiv \int_{v_0}^{v} F(v)\,dv + \int_{w_0}^{w} F(w)\,dw = 0\,,$$

auf II:

$$J_{\mathrm{II}} \equiv \int_{v_0}^{v} F(v)\,dv + \int_{w_0}^{l_2} F(w)\,dw + \int_{w}^{l_2} F(w)\,dw = 0\,,$$

auf III:

$$J_{\mathrm{III}} \equiv \int_{v_0}^{-b^2} F(v)\,dv + \int_{v}^{-b^2} F(v)\,dv + \int_{w_0}^{l_2} F(w)\,dw + \int_{w}^{l_2} F(w)\,dw = 0,$$

auf IV:

$$J_{\mathrm{IV}} \equiv \int_{v_0}^{-b^2} F(v)\,dv + \int_{v}^{-b^2} F(v)\,dv + \int_{w_0}^{l_2} F(w)\,dw + \int_{-a^2}^{l_2} F(w)\,dw + \int_{-a^2}^{w} F(w)\,dw = 0.$$

Betrachten wir nun die Schar der Extremalen, die durch den festen Punkt P_0 gehen, so lautet wieder die Bedingung für das Vorhandensein konjugierter Punkte

$$\frac{\partial J}{\partial C} = 0.$$

Wir schicken zunächst einige Hilfsberechnungen voraus. Wir setzen

$$G(\xi) = F(\xi)\sqrt{(\xi - l_1)(\xi - l_2)}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial C}\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{G(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi - l_1)(\xi - l_2)}} = -\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{G(\xi)\,d\xi}{2\sqrt{(\xi - l_1)(\xi - l_2)^3}} = \varphi(\xi_0, \xi). \tag{25}$$

Ist dagegen eine der Integrationsgrenzen von dem Scharparameter C abhängig, was bei dem Integral

$$\int_{w_0}^{l_2} F(w)\,dw = \int_{w_0}^{l_2} \frac{G(w)\,dw}{\sqrt{(w-l_1)(w-l_2)}}$$

der Fall ist, so ist die Differentiation nach der oberen Grenze nicht ohne weiteres statthaft, da der Integrand für $w = l_2$ unendlich groß wird. Wir führen daher zur Abkürzung die Größe

$$\frac{G(w)}{\sqrt{w-l_1}} = H(w)$$

ein und erhalten durch partielle Integration

$$\int_{w_0}^{l_2} F(w)\,dw = -2\sqrt{w_0-l_2}\cdot H(w_0) - 2\int_{w_0}^{l_2}\sqrt{w-l_2}\cdot H'(w)\,dw,$$

wobei $H'(w) = dH(w)/dw$ ist. Dann ergibt sich, da nach den Gleichungen (22) und (20)

$$\frac{dl_2}{dC} = -\frac{dl_1}{dC} = \frac{1}{l_1-l_2}$$

ist,

$$\frac{\partial}{\partial C}\int_{w_0}^{l_2} F(w)\,dw = \chi(w_0, l_2) \tag{26}$$

$$= \frac{1}{l_1-l_2}\left\{F(w_0) - \int_{w_0}^{l_2}\frac{H(w) - 2(w-l_1)H'(w)}{2(w-l_1)\sqrt{w-l_2}}\,dw\right\}.$$

Setzen wir noch

$$\frac{\partial J}{\partial C} = \psi,$$

so folgt aus Gleichung (25) für den Bogen I der Extremalen

$$\frac{\partial J_{\mathrm{I}}}{\partial C} = \psi_{\mathrm{I}}(v_0, v) = \varphi(v_0, v) + \varphi(w_0, w)$$

und mithin, falls wir, wie in der letzten Gleichung angedeutet ist, ψ als Funktion von v betrachten,

$$\psi_{\mathrm{I}}(v_0, v) < 0,$$

$$\frac{d\psi_{\mathrm{I}}}{dv} = \frac{\partial\psi_{\mathrm{I}}}{\partial v} + \frac{\partial\psi_{\mathrm{I}}}{\partial w}\frac{dw}{dv} < 0,$$

und

$$\lim_{\substack{w=l_2+0\\ v=v_1-0}} \psi_{\mathrm{I}}(v_0, v) = -\infty;$$

denn auf dem Bogen I wächst v, während w abnimmt, und es gilt ja die Beziehung

$$l_2 \leqq w < l_1 \leqq v.$$

Die Funktion $\psi_{\mathrm{I}}(v_0, v)$ fällt also ständig, wenn v von v_0 bis v_1 wächst, und nähert sich dem Werte $-\infty$. Es kann daher auf dem Bogen I kein zu P_0 konjugierter Punkt existieren. Im Punkte B_1 selbst ist nach Gleichung (26)

$$\psi_{\mathrm{I}}(v_0, v_1) = \varphi(v_0, v_1) + F(v_1)\frac{dv_1}{dC} + \chi(w_0, l_2),$$

und diese Größe ist endlich. Auf dem Bogen II erhält man

$$\psi_{II}(v_0, v) = \varphi(v_0, v) + \chi(w_0, l_2) + \chi(w, l_2),$$

und Gleichung (26) liefert

$$\chi(l_2, l_2) = + \infty,$$

sodaß auch

$$\psi_{II}(v_0, v_1) = + \infty$$

wird. Ferner ist

$$\frac{d\chi(w, l_2)}{dw} = \frac{F(w)}{2(w - l_1)(w - l_2)} < 0$$

und, da auf Teil II der Extremalen v und w wachsen,

$$\frac{d\psi_{II}}{dv} < 0;$$

die Größe $\psi_{II}(v_0, - b^2)$ ist wieder endlich. Man übersieht ohne weiteres, daß die Funktion

$$\psi_{III}(v_0, v) = \varphi(v_0, - b^2) + \varphi(v, - b^2) + \chi(w_0, l_2) + \chi(w_1, l_2) + \varphi(w, w_1)$$

für $v = - b^2$ und $v = v_2$, d. h. $w = - a^2$ ebenfalls endlich bleibt und mit abnehmendem v weiter fällt, da hier

$$\frac{d\psi_{III}}{dv} > 0$$

ist. Schließlich ist

$$\psi_{IV}(v_0, v) = \varphi(v_0, - b^2) + \varphi(v, - b^2) + \chi(w_0, l_2) + \chi(w_1, l_2) + \varphi(- a^2, w_1) + \varphi(- a^2, w),$$

die Größe $\psi_{IV}(v_0, v_2)$ endlich und

$$\frac{d\psi_{IV}}{dv} > 0,$$

sodaß also ψ_{IV} weiter abnimmt, um sich, wenn v an l_1 heranrückt, dem Werte $- \infty$ zu nähern. Da nun offenbar

$$\psi_{II}(v_0, -b^2) = \psi_{III}(v_0, - b^2)$$

und

$$\psi_{III}(v_0, v_2) = \psi_{IV}(v_0, v_2)$$

ist, so erhalten wir folgendes Ergebnis:

Bewegen wir uns auf der Extremalen von B_1, einem Berührungspunkte mit der Parameterlinie $w = l_2$, nach dem darauffolgenden B_2, so fällt die Funktion ψ monoton und stetig von dem Werte $+ \infty$ bis zu sehr großen negativen Werten; sie hat also den Wert Null einmal und nur einmal passiert. *Es existiert daher zu jedem* [1]) *Punkte P_0 der Bahnkurve, der kein Berührungspunkt mit der Linie $w = l_2$ ist, ein konjugierter zwischen den beiden auf ihn folgenden Berührungspunkten mit der Kurve $w = l_2$ und der Kurve $v = l_1$.*

Man übersieht ohne Schwierigkeit, daß ganz analoge Betrachtungen zum Ziele führen, wenn die Bahnkurve zunächst die Parameterlinie $v = l_1$ berührt. Dasselbe gilt im Falle (23) II, und es erübrigt sich, auf ihn näher einzugehen. Fall III endlich läßt sich mit wenigen Worten erledigen.

---

[1]) Die scheinbare Schwierigkeit im Falle $w_0 = - a^2$ — die Endlichkeit der Größe $\chi(- a^2, l_2)$ ist in Frage gestellt — kann man dadurch beheben, daß man

$$\int_{-a^2}^{l_2} F(w)\,dw = \int_{-a^2}^{w'} F(w)\,dw + \int_{w'}^{l_2} F(w)\,dw$$

setzt, wobei w' ein willkürlicher Wert der Variablen w zwischen $- a^2$ und l_2 ist.

In diesem Falle ist im Gegensatz zu den beiden ersten, da $l_1 = -a^2$ ist, nach (20) der Scharparameter C bei fester Energiekonstanten

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2 - g x_0,$$

wobei die Indices 0 die Anfangsgeschwindigkeit bzw. die Anfangslage kennzeichnen, konstant, also auch l_2, und zwar ist nach (22)

$$l_2 = a^2 - c.$$

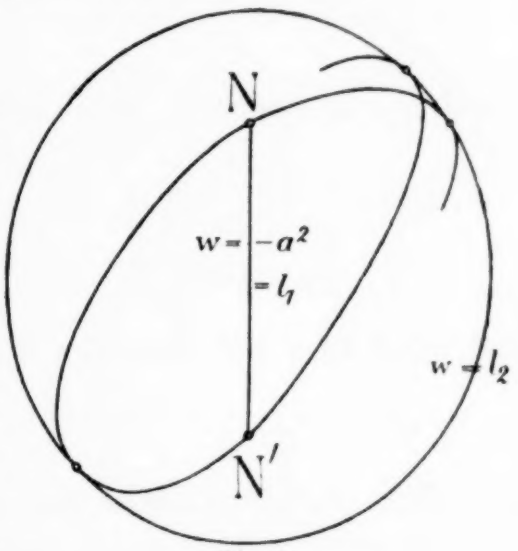

Fig. 4.

Trotzdem existiert, wenn wir den einen Nabelpunkt N (s. Fig. 4) als Ausgangspunkt wählen, eine durch ihn gehende Schar von Extremalen; denn bei festem h kann man noch über die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit verfügen. Alle diese Scharkurven gehen durch den zweiten Nabelpunkt N' und berühren dieselbe Parameterlinie $w = l_2$. Also ist diese die Enveloppe unserer Extremalenschar, und die Existenz von konjugierten Punkten ist gesichert. Gehen wir von einem Nabelpunkte aus, so ist der nächste Berührungspunkt der Bahnkurve mit der Linie $w = l_2$ zum Ausgangspunkt konjugiert; der konjugierte Punkt dieses Berührungspunktes ist der nächste Nabelpunkt usf.

§ 4. Das hyperelliptische Umkehrproblem.

Als Grundlage unserer weiteren Untersuchungen wählen wir eine Arbeit des russischen Mathematikers *Posse* [1]).

Er stellt die Verzweigung der Funktion

$$r = \sqrt{R(x)},$$

$$R(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4),$$

wobei $\alpha_\mu > \alpha_{\mu+1}$ und die Größen α_μ reell sind, durch eine zweiblättrige *Riemann*sche Fläche dar, deren Zerschneidung durch die Querschnittpaare $a_1, b_1; a_2, b_2$ in Figur 5

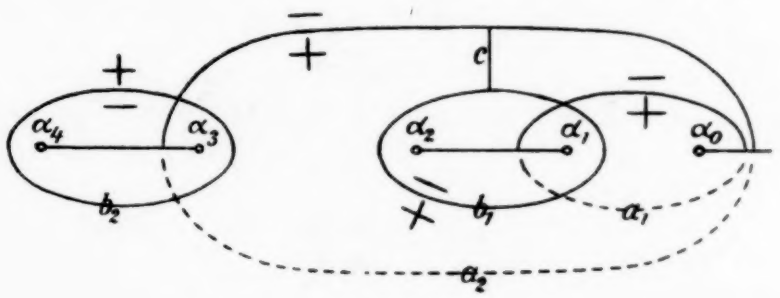

Fig. 5.

angedeutet ist. Der Querschnitt c bewirkt, daß die Fläche einfach zusammenhängend wird. Für Integrale auf der Fläche ohne Querschnitt c benutzt *Posse* das übliche Integralzeichen, für solche auf der einfach zusammenhängenden Fläche verwendet er das Symbol $\int'$. Ferner wird festgesetzt, daß die Quadratwurzel r auf der linken Seite des Verzweigungsschnittes $\overrightarrow{\alpha_2\alpha_1}$ im oberen Blatt der *Riemann*schen Fläche positiv reell zu nehmen sei.

---

[1]) *K. Posse*, O funkcijach ϑ of dvuch argumentov i o zadaěě Jakobi, Petersburg 1882, Kap. II.

Als linearunabhängige Integrale erster Gattung definiert *Posse* die beiden Größen

$$w_\varrho = \int_\infty^{x,r}{}'' \frac{m_\varrho + n_\varrho x}{r}\, dx, \quad \varrho = 1, 2, \tag{27}$$

wobei m_ϱ, n_ϱ Festwerte bedeuten. Er setzt

$$2\int_{\alpha_{2\sigma-1}}^{\alpha_{2\sigma}} d\, w_\varrho = A_{\sigma\varrho}, \qquad 2\sum_{\lambda=0}^{\sigma-1}\int_{\alpha_{2\lambda}}^{\alpha_{2\lambda+1}} d\, w_\varrho = B_{\sigma\varrho}, \tag{28}$$

$$\varrho, \sigma = 1, 2$$

und führt dann mit Hilfe der Gleichungen

$$V_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{2} \Gamma_{\varrho\sigma}\, w_\sigma, \qquad \varrho = 1, 2 \tag{29}$$

zwei Normalintegrale erster Gattung V_1 und V_2 ein. Die Konstanten $\Gamma_{\varrho\sigma}$ werden so bestimmt, daß die Integrale V_1 und V_2 folgende Periodizitätsmoduln besitzen:

am Querschnitt:	V_1	V_2
a_1	πi	0
a_2	0	πi
b_1	τ_{11}	τ_{12}
b_2	τ_{21}	τ_{22}

Es ergibt sich

$$\Gamma_{\varrho\sigma} = \pi i \frac{d \lg \Delta}{d A_{\varrho\sigma}}, \tag{30}$$

falls

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \Delta$$

gesetzt wird, und

$$\tau_{12} = \tau_{21}.$$

Seinen weiteren Entwicklungen legt *Posse* die zweifach unendliche Thetareihe

$$\vartheta[\omega](v_1, v_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{\psi\left(n_1+\frac{g_1}{2},\ n_2+\frac{g_2}{2}\right)} e^{2\left(n_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(v_1+\frac{h_1\pi i}{2}\right)+2\left(n_2+\frac{g_2}{2}\right)\left(v_2+\frac{h_2\pi i}{2}\right)} \tag{31}$$

zugrunde, wobei

$$[\omega] = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

und

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \tau_{11}\mathfrak{x}^2 + 2\tau_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + \tau_{22}\mathfrak{y}^2$$

ist; die Größen g und h sind ganze Zahlen. Man erhält, daß

$$\vartheta\Big(\int_\infty^{x,r}{}'' dV_1 + k_1,\ \int_\infty^{x,r}{}'' dV_2 + k_2\Big) \equiv 0,$$

d. h. Null für jede Wertverbindung (x, r) der *Riemann*schen Fläche, und

$$\vartheta\Big(\int_\infty^{x,r}{}'' dV_1 - \int_\infty^{x_1,r_1}{}'' dV_1 - \int_\infty^{x_2,r_2}{}'' dV_1 - k_1,\ \int_\infty^{x,r}{}'' dV_2 - \int_\infty^{x_1,r_1}{}'' dV_2 - \int_\infty^{x_2,r_2}{}'' dV_2 - k_2\Big) = 0^1$$

in den beiden Punkten (x_1, r_1) und (x_2, r_2), wenn $(x_2, r_2) \neq (x_1, -r_1)$ ist; dabei ist zur Abkürzung ϑ für $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right]$ gesetzt. Die Konstanten k_1, k_2 sind gegeben durch die Kongruenzen

$$k_1 \mid k_2 \equiv \frac{\pi i + \tau_{11} + \tau_{12}}{2} \,\Big|\, \frac{\tau_{12} + \tau_{22}}{2}.$$

Schließlich betrachtet *Posse* den Thetaquotienten

$$\frac{\vartheta[\omega](V_1 + V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + k_1, \quad V_2 + V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + k_2)}{\vartheta(V_1 + V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + k_1, \quad V_2 + V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + k_2)},$$

wobei

$$V_\varrho = \int_\infty^{x, r}{}' dV_\varrho \text{ und } V_\varrho^{(\sigma)} = \int_\infty^{x_\sigma, r_\sigma}{}' dV_\varrho, \quad \varrho, \sigma = 1, 2$$

ist, und bestimmt mittels bekannter Methoden die algebraische Funktion, der obiger Thetaquotient gleich ist. Dann läßt er die obere Grenze x unendlich groß werden und erhält dadurch folgendes Formelsystem:

$$\text{I.} \quad \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right](v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)} = c_0 \sqrt{\alpha_0 - x_1}\sqrt{\alpha_0 - x_2},$$

$$\text{II.} \quad \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right](v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)} = c_1 \sqrt{\alpha_1 - x_1}\sqrt{\alpha_1 - x_2},$$

(32)

$$\text{III.} \quad \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right](v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)} = c_2 \sqrt{\alpha_2 - x_1}\sqrt{\alpha_2 - x_2},$$

$$\text{IV.} \quad \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right](v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)} = c_3 \sqrt{\alpha_3 - x_1}\sqrt{\alpha_3 - x_2},$$

$$\text{V.} \quad \frac{\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right](v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)} = c_4 \sqrt{x_1 - \alpha_4}\sqrt{x_2 - \alpha_4};$$

$$v_\varrho \equiv \int_{\alpha_1}^{x_1, r_1}{}' dV_\varrho + \int_{\alpha_2}^{x_2, r_2}{}' dV_\varrho, \quad \varrho = 1, 2.$$

Er setzt

$$v_\varrho = \int_{\alpha_1}^{x_1, r_1}{}' dV_\varrho + \int_{\alpha_2}^{x_2, r_2}{}' dV_\varrho \tag{33}$$

und errechnet für die Konstanten c_μ die Werte

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{R'(\alpha_0)}}, \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{-R'(\alpha_1)}}, \quad c_2 = \frac{i}{\sqrt[4]{R'(\alpha_2)}}, \quad c_3 = \frac{i}{\sqrt[4]{-R'(\alpha_3)}}, \quad c_4 = \frac{1}{\sqrt[4]{R'(\alpha_4)}}, \tag{34}$$

$$R'(\alpha_\mu) = \left(\frac{dR(x)}{dx}\right)_{x=\alpha_\mu} = \prod_{\nu=0}^{4}{}' (\alpha_\mu - \alpha_\nu);$$

die Radikanden sind dabei positive Größen.

Damit haben wir alle Formeln, die wir zur Lösung unseres Problems benötigen, beisammen.

§ 5. Die Parameterdarstellung der Extremalen.

Wir betrachten neben der Gleichung der Bahnkurve (vgl. Gleichung (18))

$$\int_{v_0}^{v} \frac{(v-u)\,dv}{\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} + \int_{w_0}^{w} \frac{(w-u)\,dw}{\varepsilon_2\sqrt{R(w)}} = 0, \tag{35}$$

wobei also

$$R(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}+a^2)(\mathfrak{x}+b^2)(\mathfrak{x}-u)(\mathfrak{x}-l_1)(\mathfrak{x}-l_2)$$

ist, den Ausdruck

$$\sqrt{g}\,dt = (v-w)\,d\tau = \{(v-u)-(w-u)\}\,d\tau; \tag{36}$$

diesen erhält man sofort, wenn man die Gleichungen

$$U + h = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{g}{2}\frac{f_1(v_1)+f_2(w_1)}{v-w}$$

und

$$ds^2 = (v-w)(dv_1^2+dw_1^2) = (v-w)(f_1(v_1)+f_2(w_1))\,d\tau^2,$$

die sich bei Entwicklung der Beziehung (16) ergeben, entsprechend kombiniert. Aus Gleichung (36) für die Zeit t folgt nun nach (17)

$$\sqrt{g}\,dt = -\frac{(v-u)(w-u)\,dv}{2\,\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} - \frac{(v-u)(w-u)\,dw}{2\,\varepsilon_2\sqrt{R(w)}}.$$

Wir setzen

$$\frac{dv}{2\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} + \frac{dw}{2\varepsilon_2\sqrt{R(w)}} = -\frac{\sqrt{g}\,dt}{(v-u)(w-u)} = \frac{d\xi}{2}\ ^{1}), \tag{37}$$

dann ist

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{2\sqrt{g}}{(v-u)(w-u)} \tag{37'}$$

dauernd negativ, da ja immer

$$w < -a^2 < v < -b^2 < u$$

ist. Setzt man jetzt in Übereinstimmung mit Gleichung (37)

$$\int_{\alpha_1}^{v} \frac{dv}{\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} + \int_{\alpha_2}^{w} \frac{dw}{\varepsilon_2\sqrt{R(w)}} = \xi \tag{38}$$

und

$$\int_{\alpha_1}^{v} \frac{(v-u)\,dv}{\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} + \int_{\alpha_2}^{w} \frac{(w-u)\,dw}{\varepsilon_2\sqrt{R(w)}} = \eta, \tag{39}$$

so ist infolge der Gleichung (35)

$$\eta = \text{const.} = \eta_0 = \int_{\alpha_1}^{v_0} \frac{(v-u)\,dv}{\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} + \int_{\alpha_2}^{w_0} \frac{(w-u)\,dw}{\varepsilon_2\sqrt{R(w)}}; \tag{40}$$

der Parameter ξ dagegen geht für $0 \leqq t \leqq +\infty$ von dem Werte

$$\xi_0 = \int_{\alpha_1}^{v_0} \frac{dv}{\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} + \int_{\alpha_2}^{w_0} \frac{dw}{\varepsilon_2\sqrt{R(w)}} \tag{41}$$

---

[1]) Vergl. dazu *K. Weierstraß*, Über die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid, Werke Bd. I, S. 262.

aus und fällt, wie die Gleichungen (37′) und (38) lehren, stetig bis zu dem Werte $-\infty$.

Als linearunabhängige Integrale erster Gattung definieren wir nun die beiden Größen

$$w_1 = \int_{\infty}^{v}{}' \frac{dv}{\sqrt{R(v)}} \quad \text{und} \quad w_2 = \int_{\infty}^{v}{}' \frac{(v-u)\,dv}{\sqrt{R(v)}}; \tag{42}$$

ferner seien die Argumente der Thetafunktionen gegeben durch

$$v_\varrho = \varepsilon_1 \int_{\alpha_1}^{v} dV_\varrho + \varepsilon_2 \int_{\alpha_3}^{w} dV_\varrho, \qquad \varrho = 1, 2\ ^{1}),$$

wobei also in der *Posse*schen Bezeichnungsweise (vgl. Gleichung (27) und (29))

$$V_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{2} \Gamma_{\varrho\sigma} w_\sigma, \qquad \varrho = 1, 2$$

ist. Daraus folgt mit Hilfe der Gleichungen (38), (40) und (42)

$$v_\varrho = \Gamma_{\varrho 1}\xi + \Gamma_{\varrho 2}\eta_0. \tag{43}$$

In (23) erhielten wir zwei Bewegungstypen, die auf hyperelliptische Integrale führen, und die durch folgendes Schema charakterisiert sind:

	α_4	$<$	α_3	$<$	α_2	$<$	α_1	$<$	α_0
I.	$l_2 \leqq w \leqq$		$-a^2$	$<$	$l_1 \leqq v \leqq$		$-b^2$	$<$	u
II.	$l_2 \leqq w \leqq$		l_1	$<$	$-a^2 \leqq v \leqq$		$-b^2$	$<$	u.

Fall I:

Hier ist nach (38) und (40)

$$\xi = \int_{-b^2}^{v} \frac{dv}{\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} + \int_{-a^2}^{w} \frac{dw}{\varepsilon_2\sqrt{R(w)}},$$

$$\eta_0 = \int_{-b^2}^{v} \frac{(v-u)\,dv}{\varepsilon_1\sqrt{R(v)}} + \int_{-a^2}^{w} \frac{(w-u)\,dw}{\varepsilon_2\sqrt{R(w)}};$$

die Gleichungen (32), II und IV liefern

$$c_1^2(b^2+v)(b^2+w) = \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}(v_1, v_2)}{\vartheta^2(v_1, v_2)}$$

und

$$c_3^2(a^2+v)(a^2+w) = \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}(v_1, v_2)}{\vartheta^2(v_1, v_2)}.$$

Also ergibt sich infolge der Gleichungen (13) für die Extremale die Parameterdarstellung

$$y^2 = C_3^2 \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}(v_1, v_2)}{\vartheta^2(v_1, v_2)},$$

$$z^2 = C_1^2 \frac{\vartheta^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}(v_1, v_2)}{\vartheta^2(v_1, v_2)}, \tag{44}$$

---

[1]) Daß wir hier bei der Definition der Argumente im Gegensatz zu Gleichung (33) die Fläche ohne Querschnitt c zu Grunde legen, bereitet keine Schwierigkeit. Die durch Gleichung (33) eingeführten Argumente unterscheiden sich von den oben definierten um Systeme zusammengehöriger Perioden, sodaß

$$2x - u = -\frac{y^2}{a^2+u} - \frac{z^2}{b^2+u}.$$

Dabei ist nach den Gleichungen (34)

$$(45)\qquad \begin{aligned} C_3^2 &= \frac{1}{c_3^2}\frac{a^2+u}{b^2-a^2} = (a^2+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{-(a^2+l_1)(a^2+l_2)}{a^2-b^2}} > 0, \\ C_1^2 &= \frac{1}{c_1^2}\frac{b^2+u}{a^2-b^2} = (b^2+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{(b^2+l_1)(b^2+l_2)}{a^2-b^2}} > 0. \end{aligned}$$

Besonders interessant gestalten sich die Grenzfälle

I a) $l_1 = -b^2$, d. h. $v = \text{const.} = -b^2$

und I b) $l_2 = -a^2$, d. h. $w = \text{const.} = -a^2$,

in denen der schwere Punkt bekanntlich auf dem Hauptschnitt $v = -b^2$ bzw. $w = -a^2$ hin und herläuft; es entarten dann die hyperelliptischen Funktionen in elliptische.

I a.) In diesem Falle wird $C_1^2 = 0$, und die Konstante C_3^2 geht über in

$$(46)\qquad \overline{C}_3^2 = (a^2+u)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-(a^2+l_2)};$$

ferner nehmen die Argumente v_ϱ die Werte an

$$\overline{v}_\varrho = \overline{\Gamma}_{\varrho 1}\overline{\xi} + \overline{\Gamma}_{\varrho 2}\overline{\eta}_0,$$

wobei

$$\overline{\xi} = \int_{-a^2}^{w} \frac{-dw}{\varepsilon_2(w+b^2)\sqrt{\overline{R}(w)}},$$

$$\overline{\eta}_0 = \int_{-a^2}^{w_0} \frac{-(w-u)\,dw}{\varepsilon_2(w+b^2)\sqrt{\overline{R}(w)}},$$

$$\overline{R}(w) = (w+a^2)(w-u)(w-l_2)$$

ist. Nun werden aber offenbar die Größen $\overline{B}_{11}$ und $\overline{B}_{12}$ unendlich groß; denn es ist nach (28)

$$\overline{B}_{11} = \lim_{\alpha_2=\alpha_1} B_{11} = -2i \lim_{\alpha_2=\alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \frac{dv}{\sqrt{-\overline{R}(v)}} = -2i \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \frac{dv}{(v-\alpha_1)\sqrt{-\overline{R}(v)}},$$

$$\overline{B}_{12} = \lim_{\alpha_2=\alpha_1} B_{12} = 2i \lim_{\alpha_2=\alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \frac{(\alpha_0-v)\,dv}{\sqrt{-\overline{R}(v)}} = 2i \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \frac{(\alpha_0-v)\,dv}{(v-\alpha_1)\sqrt{-\overline{R}(v)}},$$

während

$$\overline{B}_{21} = \lim_{\alpha_2=\alpha_1} B_{21} = -2i\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \frac{dv}{(v-\alpha_1)\sqrt{-\overline{R}(v)}} - \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{dv}{(\alpha_1-v)\sqrt{-\overline{R}(v)}}\right\},$$

$$\overline{B}_{22} = \lim_{\alpha_2=\alpha_1} B_{22} = 2i\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_0} \frac{(\alpha_0-v)\,dv}{(v-\alpha_1)\sqrt{-\overline{R}(v)}} - \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{(\alpha_0-v)\,dv}{(\alpha_1-v)\sqrt{-\overline{R}(v)}}\right\}$$

endlich bleiben; die Integrale sind positiv reell. Es ist vorteilhafter [1]), in diesem Falle als linearunabhängige Integrale 1. Gattung

---

die quadrierten Gleichungen (32) mit den dort bestimmten Werten der Konstanten c_μ in beiden Fällen richtig sind.

[1]) Vergl. *J. Thomae*, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhainschen Funktionen gebraucht werden, Halle a. S. 1876, S. 24.

$$w_1 = \int_{\infty}^{v'} \frac{dv}{\sqrt{R(v)}} \quad \text{und} \quad w_2 = \int_{\infty}^{v'} \frac{(v-\alpha_1)\,dv}{\sqrt{R(v)}}$$

einzuführen. Dann wird

$$\overline{A}_{12} = 0,$$

$$\overline{A}_{11} = \lim_{\alpha_2=\alpha_1} A_{11} = -2 \lim_{\alpha_2=\alpha_1} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{dv}{\sqrt{R(v)}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{-(\alpha_1-\alpha_0)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}}$$

und nur $\overline{B}_{11}$ unendlich groß. Also ist nach den Gleichungen (30) und (29)

$$\overline{\Gamma}_{11} = \frac{\pi i}{\overline{A}_{11}}, \quad \overline{\Gamma}_{12} = -\frac{\pi i\,\overline{A}_{21}}{\overline{A}_{11}\overline{A}_{22}}, \quad \overline{\Gamma}_{21} = 0, \quad \overline{\Gamma}_{22} = \frac{\pi i}{\overline{A}_{22}}$$

und

$$\overline{V}_2 = \frac{\pi i}{\overline{A}_{22}}\,\overline{w}_2, \quad \overline{V}_1 = \frac{\pi i\,\overline{w}_1 - \overline{A}_{21}\,\overline{V}_2}{\overline{A}_{11}};$$

$$\bar{\tau}_{11} = -\infty, \quad \bar{\tau}_{22} = \pi i\,\frac{\overline{B}_{22}}{\overline{A}_{22}}$$

und $\bar{\tau}_{12}$ eine endliche Größe. Mithin ergibt sich

$$\bar{v}_2 = -\frac{\pi i}{\overline{A}_{22}} \int_{-a^2}^{w} \frac{dw}{\varepsilon_2 \sqrt{R(w)}},$$

$$\bar{v}_1 = \frac{\sqrt{(b^2+u)(a^2-b^2)(-b^2-l_2)}}{2\pi} \left\{ \int_{-a^2}^{w} \frac{\pi i\,dw}{\varepsilon_2 (w+b^2)\sqrt{R(w)}} + \overline{A}_{21}\,\bar{v}_2 \right\}.$$

Schließlich gehen die hyperelliptischen Funktionen

$$\vartheta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2) \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2),$$

wie die expliziten Entwicklungen zeigen, über in

$$-2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \bar{\tau}_{22}} \sin (2n+1)\,\frac{\bar{v}_2}{i} = -\vartheta_1\left(\frac{\bar{v}_2}{i}, q\right)$$

bzw.

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \bar{\tau}_{22}} \cos 2n\,\frac{\bar{v}_2}{i} = \vartheta_3\left(\frac{\bar{v}_2}{i}, q\right),$$

$$q = e^{\bar{\tau}_{22}},$$

$\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2)$ dagegen wird Null. Folglich ist die Bahnkurve gegeben durch

$$y^2 = \overline{C}_3^2 \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{\bar{v}_2}{i}, q\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\bar{v}_2}{i}, q\right)}, \tag{47}$$

$$2x - u = -\frac{y^2}{a^2+u}\ ^{1}).$$

---

[1]) *Thomae* behandelt diese Aufgabe (Bewegung eines schweren Punktes auf einer Parabel) in der eben zitierten Formelsammlung S. 28ff.; bei ihm tritt die Zeit t als Parameter auf. Doch ist unsere Lösung, die hier als Spezialfall erscheint, übersichtlicher.

I b.) Jetzt betrachten wir

$$w_1 = \int_{\infty}^{v}{}' \frac{dv}{\sqrt{R(v)}} \quad \text{und} \quad w_2 = \int_{\infty}^{v}{}' \frac{(v-\alpha_3)\,dv}{\sqrt{R(v)}}$$

als linearunabhängige Integrale; dann ist

$$\overline{A}_{22} = 0,$$

$$\overline{A}_{21} = \lim_{\alpha_4=\alpha_3} A_{21} = 2 \lim_{\alpha_4=\alpha_3} \int_{\alpha_4}^{\alpha_3} \frac{dv}{\sqrt{R(v)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{-(\alpha_3-\alpha_0)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}}$$

und $\overline{B}_{21}$ unendlich groß. In diesem Falle erhält man

$$\overline{V}_1 = \frac{\pi i}{\overline{A}_{12}}\,\overline{w}_2, \qquad \overline{V}_2 = \frac{\pi i\,\overline{w}_1 - \overline{A}_{11}\overline{V}_1}{\overline{A}_{21}};$$

$$\bar{\tau}_{11} = \pi i \frac{\overline{B}_{12}}{\overline{A}_{12}}, \qquad \bar{\tau}_{22} = -\infty,$$

während auch $\bar{\tau}_{12}$ endlich bleibt. Da nun hier die Funktionen

$$\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2) \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)$$

in die elliptischen Thetareihen

$$-\vartheta_1\left(\frac{\bar{v}_1}{i}, q\right) \quad \text{und} \quad \vartheta_3\left(\frac{\bar{v}_1}{i}, q\right), \qquad q = e^{\bar{\tau}_{11}}$$

entarten und $\vartheta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2)$ verschwindet, so lautet die Parameterdarstellung der Extremalen

$$z^2 = \overline{C}_1^2 \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{\bar{v}_1}{i}, q\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\bar{v}_1}{i}, q\right)}, \tag{48}$$

$$2x - u = -\frac{z^2}{b^2+u},$$

wobei

$$\overline{C}_1^2 = (b^2+u)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-(b^2+l_1)}$$

und

$$\bar{v}_1 = \frac{\pi i}{\overline{A}_{12}} \int_{-b^2}^{v} \frac{dv}{\varepsilon_1 \sqrt{\overline{R}(v)}},$$

$$\overline{R}(v) = (v+b^2)(v-u)(v-l_1)$$

ist.

Posse weist für zwei spezielle Integrale w_ϱ nach, daß die Größen $\tau_{\varrho\sigma}$ und $\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}$ negativ reell sind. Nun läßt sich bekanntlich jedes andere Integral 1. Gattung linear durch diese beiden ausdrücken. Bei einer derartigen Transformation ändern aber die Größen $\tau_{\varrho\sigma}$, wie man leicht übersieht, nicht ihre Werte, so daß die Konvergenz der hyperelliptischen und elliptischen Thetafunktionen bei beliebigen linearunabhängigen Integralen w_ϱ gesichert ist. Die Argumente v_ϱ und $\bar{v}_\varrho$ sind rein imaginär; es lassen sich daher beide Arten der Thetafunktionen nach den trigonometrischen Funktionen Sinus bzw. Cosinus mit reellen Argumenten entwickeln.

Fall II:

Wir setzen nun wieder die im ersten Hauptfall (Gleichungen (42)) eingeführten linearunabhängigen Integrale w_ϱ voraus, und es ergeben sich aus den Gleichungen (32), II und III die Beziehungen

$$c_1^2 (b^2 + v)(b^2 + w) = \frac{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2)}{\vartheta^2 (v_1, v_2)}$$

und

$$c_2^2 (a^2 + v)(a^2 + w) = \frac{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2)}{\vartheta^2 (v_1, v_2)},$$

wobei also

$$v_\varrho = \Gamma_{\varrho 1} \xi + \Gamma_{\varrho 2} \eta_0$$

und

$$\xi = \int_{-b^2}^{v} \frac{dv}{\varepsilon_1 \sqrt{R(v)}} + \int_{i_1}^{w} \frac{dw}{\varepsilon_2 \sqrt{R(w)}},$$

$$\eta_0 = \int_{-b^2}^{v_0} \frac{(v-u)\,dv}{\varepsilon_1 \sqrt{R(v)}} + \int_{i_1}^{w_0} \frac{(w-u)\,dw}{\varepsilon_2 \sqrt{R(w)}}$$

ist. Mithin folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (13) und (34), falls man

$$\frac{1}{c_2^2} \frac{a^2 + u}{b^2 - a^2} = (a^2 + u)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(a^2 + l_1)(a^2 + l_2)}{a^2 - b^2}} = C_2^2 > 0$$

und wieder

$$\frac{1}{c_1^2} \frac{b^2 + u}{a^2 - b^2} = (b^2 + u)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(b^2 + l_1)(b^2 + l_2)}{a^2 - b^2}} = C_1^2 > 0$$

setzt,

$$y^2 = C_2^2 \frac{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2)}{\vartheta^2 (v_1, v_2)},$$

$$z^2 = C_1^2 \frac{\vartheta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2)}{\vartheta^2 (v_1, v_2)} \tag{49}$$

$$2x - u = -\frac{y^2}{a^2 + u} - \frac{z^2}{b^2 + u}$$

als Parameterdarstellung der Bahnkurve.

Der Grenzfall

$$l_2 = l_1 \quad \text{d. h.} \quad w = \text{const.} = l_1$$

läßt sich auf den Fall I b zurückführen; es sind nur die Größen l_1 und $-a^2$ zu vertauschen. Außerdem ist zu bedenken, daß die hier auftretende Funktion

$$\vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (v_1, v_2)$$

in die Thetareihe

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau_{11}} \cos (2n+1) \frac{\overline{v}_1}{i} = \vartheta_2 \left(\frac{\overline{v}_1}{i}, q \right),$$

wobei

$$\bar{v}_1 = \frac{\pi i}{\bar{A}_{12}} \int_b^v \frac{dv}{\varepsilon_1 \sqrt{\bar{R}(v)}},$$

$$\bar{R}(v) = (v + a^2)\,(v + b^2)\,(v - u)$$

ist, degeneriert. Folglich gehen die Gleichungen (49) über in

$$(50)\qquad \begin{aligned} y^2 &= \bar{C}_2^2 \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{\bar{v}_1}{i}, q\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\bar{v}_1}{i}, q\right)}, \\ z^2 &= \bar{C}_1^2 \frac{\vartheta_1^2\left(\frac{\bar{v}_1}{i}, q\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\bar{v}_1}{i}, q\right)}, \end{aligned}$$

$$2x - u = -\frac{y^2}{a^2 + u} - \frac{z^2}{b^2 + u};$$

$$\bar{C}_2^2 = \frac{-(a^2 + u)^{\frac{3}{2}}(a^2 + l_1)}{\sqrt{a^2 - b^2}} > 0,$$

$$\bar{C}_1^2 = \frac{-(b^2 + u)^{\frac{3}{2}}(b^2 + l_1)}{\sqrt{a^2 - b^2}} > 0.$$

Gießen, den 30. April 1928.

Eingegangen 1. Mai 1928.

Der *Weierstraß*sche Vorbereitungssatz.

Von *Hans Späth* † in Tübingen.

Die Bedeutung des *Weierstraß*schen Vorbereitungssatzes mag es rechtfertigen, wenn ich den vielen für ihn gegebenen Beweisen [1]) einen weiteren hinzufüge, der mir, wenn er auch sehr formal ist, durch seine Einfachheit bemerkenswert zu sein scheint.

I.

Der Satz läßt sich etwas abweichend von der üblichen Formulierung auch folgendermaßen aussprechen [2]):

Satz 1. *In der Potenzreihe der* $r+1$ *Variablen* $w; z_1, z_2, \ldots, z_r$

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(w; z_1, z_2, \ldots, z_r) = \mathfrak{P}(w; z) = \sum_{\substack{m=0 \\ n_1=0,\ldots,n_r=0}}^{\infty} p_{m;n_1 \ldots n_r} w^m z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_r^{n_r}$$

seien die Koeffizienten

$$(2) \qquad p_{m;0\,0\ldots 0} = 0 \quad \text{für} \quad m < k \quad \text{und} \quad p_{k;0\,0\ldots 0} = 1 \quad (k \geqq 0),$$

und die übrigen seien absolut kleiner als eine Konstante M.

Dann gibt es zu jeder Potenzreihe $\mathfrak{B}(w; z) = \sum_{\substack{m=0 \\ n_1=0,\ldots,n_r=0}}^{\infty} b_{m;n_1 \ldots n_r} w^m z_1^{n_1} \cdots z_r^{n_r}$, *deren Koeffizienten ebenfalls beschränkt sein mögen, eine eindeutig bestimmte Potenzreihe* $\mathfrak{Q}(w; z) = \sum_{\substack{m=0 \\ n_1=0,\ldots,n_r=0}}^{\infty} q_{m;n_1 \ldots n_r} w^m z_1^{n_1} \cdots z_r^{n_r}$, *derart, daß die Reihe* $\mathfrak{Q}(w; z)\mathfrak{P}(w; z) - \mathfrak{B}(w; z)$ *in* w *nur bis zum Grade* $k-1$ *ansteigt, m. a. W. daß in*

$$(3) \qquad \mathfrak{Q}(w; z)\mathfrak{P}(w; z) = \sum_{\substack{m=0 \\ n_1=0,\ldots,n_r=0}}^{\infty} \beta_{m;n_1 \ldots n_r} w^m z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_r^{n_r}$$

für alle $m \geqq k$

$$(4) \qquad \beta_{m;n_1 \ldots n_r} = b_{m;n_1 \ldots n_r}$$

ist.

Beweis. Schreiben wir jeweils kurz n für das ganze System $n_1, n_2, \ldots, n_r$ und dementsprechend $p_{m,n}$ für $p_{m;n_1 \ldots n_r}$, $p_{m-\mu, n-\nu}$ für $p_{m-\mu;n_1-\nu_1 \ldots n_r-\nu_r}$, $\sum_{\nu=0}^{n}$ für $\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{\nu_r=0}^{n_r}$ usw., so erhalten wir wegen (2) aus (3)

---

[1]) Vgl. z. B. *A. Brill*, Math. Ann. **69** (1910), S. 538—49 (mit Hinweisen auf *Stickelberger*, *Hartogs*, *Dumas*). Weitere Literaturangaben finden sich in *W. Osgood*, Lehrb. d. Funktionentheorie Bd. II, 1, Lpzg. 1924, S. 71, sowie in einer kürzlich erschienenen Arbeit von *W. Wirtinger*, Journ. f. reine u. angew. Math. **158** (1927), S. 260—67.

[2]) Ich lehne mich dabei an die *Brill*sche Darstellung an. Die etwas spezielle Form der Voraussetzungen wähle ich im Hinblick auf II. Es ist $r \geqq 1$ vorausgesetzt, aber mit einigen sinngemäßen Abänderungen gilt das Folgende auch für $r = 0$.

$$\beta_{m,n} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} q_{\mu,\nu}\; p_{m-\mu,n-\nu} = q_{m-k,n} + \sum_{\mu=0}^{m-k-1} q_{\mu,n}\; p_{m-\mu;00\ldots0} + \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}{}' q_{\mu,\nu}\; p_{m-\mu,n-\nu}.$$

Dabei ist in der gestrichenen Summe $\sum_{\nu=0}^{n}{}'$ das Wertesystem $\nu_1 = n_1,\ \nu_2 = n_2,\ \ldots,\ \nu_r = n_r$, kurz $\nu = n$ auszulassen, so daß also in $\sum_{\nu=0}^{n}{}'$ immer $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_r \leqq n_1+n_2+\cdots+n_r-1$ ist. Ersetzt man noch m durch $m+k$ und berücksichtigt (4), so ergibt sich:

$$(5)\qquad q_{m,n} = b_{m+k,n} - \sum_{\mu=0}^{m-1} q_{\mu,n}\, p_{m+k-\mu;00\ldots0} - \sum_{\mu=0}^{m+k}\sum_{\nu=0}^{n}{}' q_{\mu,\nu}\, p_{m+k-\mu,n-\nu}.$$

Diese Gleichung ist nun eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $q_{m,n} = q_{m;n_1\ldots n_r}$: Bezeichnen wir für den Augenblick die Zahl $m+(k+1)(n_1+n_2+\cdots+n_r) = h$ als „Höhe" von $q_{m,n}$. Es gibt dann immer nur eine endliche Anzahl von Koeffizienten $q_{m,n}$ mit gegebener fester Höhe, und insbesondere hat die Höhe 0 allein der Koeffizient $q_{0;00\ldots0}$. Weiter haben die auf der rechten Seite von (5) vorkommenden $q_{\mu,\nu}$ alle kleinere Höhe als $q_{m,n}$, die in der ersten Summe höchstens die Höhe $m-1+(k+1)(n_1+\cdots+n_r)$ und die in der zweiten Summe höchstens die Höhe $m+k+(k+1)(n_1+\cdots+n_r-1) = m+(k+1)(n_1+\cdots+n_r)-1$. Man kann also in der Tat aus (5) zunächst den einzigen Koeffizienten von der Höhe 0, $q_{0;00\ldots0} = b_{k;00\ldots0}$, bestimmen und dann nacheinander die $q_{m,n}$ von der Höhe 1, 2, ... Formal ist dadurch die Potenzreihe $\mathfrak{Q}(w;z)$ eindeutig bestimmt.

Es ist nun noch zu beweisen, daß sie in einem gewissen Bereich auch absolut konvergiert. Dazu braucht man nur zu zeigen, daß die $q_{m,n}$ einer Wachstumsbedingung

$$(6)\qquad |q_{m;n_1\ldots n_r}| < KC^m c_1^{n_1} c_2^{n_2}\cdots c_r^{n_r}$$

mit geeigneten Konstanten $K>1,\ C>1,\ c_1>1,\ldots,c_r>1$ genügen.

Mit einer Schranke M_1 für die $b_{m,n}$ liefert zunächst (5)

$$|q_{m,n}| \leqq M_1 + M\sum_{\mu=0}^{m-1}|q_{\mu,n}| + M\sum_{\mu=0}^{m+k}\sum_{\nu=0}^{n}{}'|q_{\mu,\nu}|.$$

Trifft hier nun (6) für alle $q_{\mu,\nu}$ auf der rechten Seite zu, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{m-1}|q_{\mu,n}| \leqq KC^{m-1}c_1^{n_1}\cdots c_r^{n_r}\sum_{\mu=0}^{m-1}C^{-\mu} < KC^{m-1}c_1^{n_1}\cdots c_r^{n_r}\sum_{\mu=0}^{\infty}C^{-\mu} = \frac{KC^m c_1^{n_1}\cdots c_r^{n_r}}{C-1}$$

und

$$\sum_{\mu=0}^{m+k}\sum_{\nu=0}^{n}{}'|q_{\mu,\nu}| \leqq K\sum_{\mu=0}^{m+k}C^{\mu}\sum_{\nu=0}^{n}{}' c_1^{\nu_1}c_2^{\nu_2}\ldots c_r^{\nu_r} < \frac{KC^{m+k+1}}{C-1}\sum_{\nu=0}^{n}{}' c_1^{\nu_1}c_2^{\nu_2}\ldots c_r^{\nu_r}.$$

Daraus ergibt sich schließlich wegen

$$\sum_{\nu=0}^{n}{}' c_1^{\nu_1}c_2^{\nu_2}\cdots c_r^{\nu_r} = \sum_{\nu=0}^{n} c_1^{\nu_1}c_2^{\nu_2}\cdots c_r^{\nu_r} - c_1^{n_1}c_2^{n_2}\cdots c_r^{n_r} < c_1^{n_1}\cdots c_r^{n_r}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{c_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{c_r}\right)}-1\right):$$

$$|q_{m,n}| < KC^m c_1^{n_1}\cdots c_r^{n_r}\left(\frac{M_1}{KC^m c_1^{n_1}\cdots c_r^{n_r}} + \frac{M}{C-1} + \frac{MC^{k+1}}{C-1}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{c_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{c_r}\right)}-1\right)\right).$$

Es gilt also auch für $q_{m,n}$ die Beziehung (6), sobald

$$(7)\qquad \frac{M_1}{KC^m c_1^{n_1}\cdots c_r^{n_r}} + \frac{M}{C-1} + \frac{MC^{k+1}}{C-1}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{c_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{c_r}\right)}-1\right) \leqq 1$$

ist. Das trifft z. B. für die Konstanten

$$K = 3M_1 + 1, \quad C = 3M + 1, \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 4r\,C^{k+1} = 4r\,(3M+1)^{k+1}$$

sicher zu; denn dann wird in (7) jeder der drei Summanden $\leqq \frac{1}{3}$. Mit diesen Konstanten gilt somit die Beziehung (6) für alle $q_{m,n}$ von einer bestimmten Höhe sicher dann, wenn sie für alle Koeffizienten von kleinerer Höhe zutrifft. Da sie nun für $q_{0;00\ldots0} = b_{k;00\ldots0}$ wegen $|b_{k;00\ldots0}| \leqq M_1 < K$ richtig ist, muß sie allgemein gelten, d. h.: Die Reihe $\mathfrak{Q}(w;z)$ konvergiert für $|w| < \frac{1}{C}$, $|z_1| < \frac{1}{c_1}, \ldots, |z_r| < \frac{1}{c_r}$ absolut.

Speziell für $\mathfrak{B}(w;z) \equiv w^k$ liefert Satz 1 eine Relation

$$\mathfrak{Q}(w;z)\,\mathfrak{P}(w;z) = w^k + a_1(z)\,w^{k-1} + \cdots + a_k(z), \tag{8}$$

wo $a_1(z), a_2(z), \ldots, a_k(z)$ Potenzreihen von $z_1, z_2, \ldots, z_r$ allein sind und in $\mathfrak{Q}(w;z)$ das Absolutglied $q_{0;00\ldots0} = 1$ ist. Zu $\mathfrak{Q}(w;z)$ gibt es daher wieder nach Satz 1 (indem wir $\mathfrak{Q}(w;z)$ mit $k = 0$ an die Stelle von $\mathfrak{P}(w;z)$ treten lassen und $\mathfrak{B}(w;z) \equiv 1$ wählen) eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $\overline{\mathfrak{Q}}(w;z)$, mit der

$$\overline{\mathfrak{Q}}(w;z)\,\mathfrak{Q}(w;z) \equiv 1 \tag{9}$$

wird [3]); sie hat auch das Absolutglied $\bar{q}_{0;00\ldots0} = 1$. Aus (8) und (9) folgt

$$\mathfrak{P}(w;z) = [w^k + a_1(z)\,w^{k-1} + \cdots + a_k(z)]\,\overline{\mathfrak{Q}}(w;z), \tag{10}$$

d. h. der *Weierstraß*sche Vorbereitungssatz in der üblichen Form. (Die restlichen Aussagen, $a_1(z) = a_2(z) = \cdots = a_k(z) = 0$ für $z_1 = z_2 = \cdots = z_r = 0$ und Eindeutigkeit der Zerlegung (10), ergeben sich vollends leicht, indem man $z_1 = \cdots = z_r = 0$ setzt und $w \to 0$ streben läßt, bzw. indem man von (10) nach (8) zurückgeht.)

II.

Die mir inzwischen bekannt gewordene *Wirtinger*sche Arbeit (s. Fußn. 1) veranlaßte mich zu einer Ergänzung der obigen Ausführungen durch genauere Angaben über den Konvergenzbereich.

Im Falle von 2 Variablen decken sie sich im wesentlichen mit dem Ergebnis von Herrn *Wirtinger*.

Wir betrachten den Ausdruck (7) etwas genauer. Da der erste Summand durch Wahl eines großen K sehr klein gemacht werden kann, braucht man die > 1 vorausgesetzten Konstanten $C, c_1, c_2, \ldots, c_r$ nur der Bedingung

$$\frac{M}{C-1} + \frac{M\,C^{k+1}}{C-1}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{c_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{c_r}\right)} - 1\right) < 1$$

entsprechend zu wählen, oder $\Gamma = \frac{1}{C} < 1$, $\gamma_1 = \frac{1}{c_1} < 1, \ldots, \gamma_r = \frac{1}{c_r} < 1$ gemäß der sich daraus ergebenden Bedingung

$$(M+1)\,\Gamma^{k+1} - \Gamma^k + M\left(\frac{1}{(1-\gamma_1)\cdots(1-\gamma_r)} - 1\right) < 0. \tag{11}$$

$\mathfrak{Q}(w;z)$ konvergiert dann sicher absolut für $|w| \leqq \Gamma$, $|z_1| \leqq \gamma_1, \ldots, |z_r| \leqq \gamma_r$ [4]).

---

[3]) M. a. W. natürlich: Ist das Absolutglied einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(w;z)$ von Null verschieden, so läßt sich auch $1 : \mathfrak{P}(w;z)$ in eine Potenzreihe entwickeln.

[4]) Man kann hier $\leqq$, nicht nur $<$ schreiben, weil man $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ noch etwas vergrößern kann.

Wir betrachten nun [5]) speziell die Systeme $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$, für die

$$(12) \qquad (M+1)\,\Gamma^{k+1} - \Gamma^k + M\left(\frac{1}{(1-\gamma_1)\cdots(1-\gamma_r)} - 1\right) = 0$$

ist. Für $0 \leqq \gamma_\varrho < 1$, $\varrho = 1, 2, \ldots, r$, ist $M\left(\frac{1}{(1-\gamma_1)\cdots(1-\gamma_r)} - 1\right) = \Delta_\gamma \geqq 0$; also muß $(M+1)\,\Gamma^{k+1} - \Gamma^k \leqq 0$ sein. Nun nimmt die Funktion $(M+1)\,\Gamma^{k+1} - \Gamma^k$, wenn Γ von 0 an wächst, zunächst von 0 an ab, erreicht bei $\Gamma_0 = \frac{k}{(M+1)(k+1)}$ ein Minimum $(M+1)\,\Gamma_0^{k+1} - \Gamma_0^k$ und nimmt von da an monoton zu; bei $\Gamma_1 = \frac{1}{M+1}$ geht sie wachsend durch 0. Soll daher (12) befriedigt werden, so muß zunächst

$$(13) \qquad M\left(\frac{1}{(1-\gamma_1)\cdots(1-\gamma_r)} - 1\right) = \Delta_\gamma \leqq \Gamma_0^k - (M+1)\,\Gamma_0^{k+1} = \frac{k^k}{(M+1)^k\,(k+1)^{k+1}}$$

sein. Trifft das zu, dann gibt es im allgemeinen zu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ genau 2 Werte von Γ, so daß (12) erfüllt ist. Für den größeren, der mit $\Gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) = \Gamma_\gamma$ bezeichnet werden möge, gilt $\Gamma_0 \leqq \Gamma_\gamma \leqq \Gamma_1$, und $\Gamma_\gamma = \Gamma_0$ nur, wenn in (13) das Gleichheitszeichen gilt.

Ist $\Gamma_\gamma > \Gamma_0$, so genügt bei kleinem $\varepsilon > 0$ das abgeänderte System $\Gamma_\gamma - \varepsilon, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ der Bedingung (11). Indem wir das Ergebnis in dem noch zu erledigenden Fall $\Gamma_\gamma = \Gamma_0$ vorausnehmen, erhalten wir so den

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 1 *konvergiert* $\mathfrak{Q}(w; z)$ *sicher absolut in jedem Bereich*

$$(14) \qquad |w| < \Gamma_\gamma, \quad |z_1| \leqq \gamma_1, \ldots, |z_r| \leqq \gamma_r,$$

wo die Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ $(0 \leqq \gamma_1 < 1, \ldots, 0 \leqq \gamma_r < 1)$ *der Bedingung*

$$(13) \qquad \Delta_\gamma = M\left(\frac{1}{(1-\gamma_1)\cdots(1-\gamma_r)} - 1\right) \leqq \Gamma_0^k - (M+1)\,\Gamma_0^{k+1} = \frac{k^k}{(M+1)^k\,(k+1)^{k+1}}$$

genügen. Dabei ist $\Gamma_0 = \frac{k}{(M+1)(k+1)}$ *und* Γ_γ *die größere der beiden Wurzeln der Gleichung* $(M+1)\,\Gamma^{k+1} - \Gamma^k + \Delta_\gamma = 0$.

Der durch Satz 2 garantierte Konvergenzbereich ist nun aber auch der umfassendste, den man allgemein für $\mathfrak{Q}(w; z)$ unter den Voraussetzungen des Satzes 1 über $\mathfrak{P}(w; z)$ und $\mathfrak{B}(w; z)$ angeben kann.

Um das einzusehen, betrachten wir speziell die Potenzreihe

$$(15) \qquad \mathfrak{P}(w; z) = w^k - M \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\infty}{}' w^m z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_r^{n_r},$$

---

[5]) Im Falle $k = 0$ sind die folgenden Schlüsse zum Teil etwas zu modifizieren, da dann (12) linear wird: $(M+1)\Gamma - 1 + M\left(\frac{1}{(1-\gamma_1)\ldots(1-\gamma_r)} - 1\right) = 0$. Satz 2 und auch die weiteren Ergebnisse bleiben aber auch in diesem Falle richtig, wenn man sinngemäß setzt: $\Delta_\gamma = M\left(\frac{1}{(1-\gamma_1)\ldots(1-\gamma_r)} - 1\right)$, $\Gamma_0 = 0$, $\Gamma_0^k - (M+1)\,\Gamma_0^{k+1} = 1$, $\Gamma_1 = \frac{1}{M+1}$, $\Gamma_\gamma = \frac{1-\Delta_\gamma}{M+1}$ (die Wurzel von $(M+1)\,\Gamma - 1 + \Delta_\gamma = 0$) und $w^k = w^0 = 1$.

wo in Σ' nur die Glieder $1, w, w^2, \ldots, w^k$ fehlen. Sie stellt für $|w|<1, |z_1|<1, \ldots, |z_r|<1$ die Funktion

$$P(w;z)=\frac{1}{w-1}\Big((M+1)\,w^{k+1}-w^k+M\Big(\frac{1}{(1-z_1)\cdots(1-z_r)}-1\Big)\Big)$$

dar. Weiter wählen wir etwa $\mathfrak{B}(w;z)=B(w;z)=w^k$. Man entnimmt dann sofort aus (5), daß die Koeffizienten $q_{m,n}$ der zugehörigen Potenzreihe $\mathfrak{Q}(w;z)=Q(w;z)$ positiv sind und mit zunehmender Höhe zuletzt wachsen. Mithin liegt der Bereich absoluter Konvergenz von $Q(w;z)$ sicher ganz in $|w|<1, |z_1|<1, \ldots, |z_r|<1$ (vgl. die Vorauss. $\Gamma<1$, $\gamma_1<1, \ldots, \gamma_r<1$), und nach (8) gilt in allen seinen Punkten

$$(16)\quad Q(w;z)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(z)\,w^m=\frac{(w-1)\,(w^k+a_1(z)\,w^{k-1}+\cdots+a_k(z))}{(M+1)\,w^{k+1}-w^k+M\Big(\dfrac{1}{(1-z_1)\cdots(1-z_r)}-1\Big)}.$$

Dabei sind die Koeffizienten $\alpha_m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}q_{m,n}z_1^{n_1}\cdots z_r^{n_r}$ und $a_k(z)$ Potenzreihen von $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Bei festen (dem Bereich absoluter Konvergenz von $Q(w;z)$ angehörigen) Werten $z_1=\bar{z}_1, \ldots, z_r=\bar{z}_r$ nehmen diese Koeffizienten feste Werte an, und man kann dann $Q(w;\bar{z})$ als Potenzreihe von w allein ansehen, deren Konvergenzkreis bis zum nächsten Pol der auf der rechten Seite von (16) stehenden rationalen Funktion reicht (der so sich ergebende Konvergenzbereich der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(z)\,w^m$ kann natürlich über den Bereich absoluter Konvergenz der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty}q_{m,n}\,w^m z_1^{n_1}\cdots z_r^{n_r}$ hinausreichen). Wählen wir speziell $\bar{z}_1=\gamma_1$ $(0\leqq\gamma_1<1), \ldots$ reell, dann werden alle $\alpha_m(\gamma)\geqq 0$, und nach dem Satz von *Vivanti-Dienes* muß daher der positiv-reelle Punkt auf dem Rande des (sicher endlichen) Konvergenzkreises ein singulärer Punkt von $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(\gamma)\,w^m$, d. h. in diesem Falle ein Pol sein. Also muß in (16) rechts der Nenner mindestens eine positiv-reelle Nullstelle haben, und weiter als bis zur größten der (etwa vorhandenen positiv-reellen Nullstellen kann der Konvergenzkreis auf keinen Fall reichen. Wie ein Vergleich mit (12) zeigt, heißt das aber: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ müssen der Bedingung (13) genügen, und für $|w|>\Gamma_\gamma$ konvergiert dann $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(\gamma)\,w^m$ nicht, also auch $\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty}q_{m,n}\,w^m z_1^{n_1}\cdots z_r^{n_r}$ sicher nicht absolut. Aus Satz 2 dagegen folgt, daß auch alle diese Systeme $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ zulässig sind und daß jeweils für $|w|<\Gamma_\gamma$ absolute Konvergenz von $Q(w;\gamma)$ vorliegt. Daraus folgt rückwärts wieder, daß $w=\Gamma_\gamma$ ein Pol von $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m(\gamma)\,w^m$ sein muß, und folglich kann $Q(w;z)$ auch für $|w|=\Gamma_\gamma$ sicher nicht absolut konvergieren. Damit ist gezeigt, daß in diesem Beispiel der Bereich absoluter Konvergenz von $Q(w;z)$ genau der in Satz 2 angegebene ist.

Wir beweisen nun nachträglich noch die in Satz 2 behauptete absolute Konvergenz von $\mathfrak{Q}(w;z)$ für $|w|<\Gamma_\gamma$, $|z_1|\leqq\gamma_1, \ldots, |z_r|\leqq\gamma_r$ im Falle $\Gamma_\gamma=\Gamma_0$[6]). Da-

[6]) Im Falle $k=0$ $(\Gamma_0=0)$ verliert die Behauptung $(|w|<0, \ldots)$ ihren positiven Sinn. Bei der Majorante $Q(w;z)$ sieht man in diesem Falle auch leicht, daß $\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty}q_{m,n}\,w^m\gamma_1^{n_1}\cdots\gamma_r^{n_r}$ für kein w absolut konvergiert, wenn $M\left(\dfrac{1}{(1-\gamma_1)\ldots(1-\gamma_r)}-1\right)=1$, also $\Gamma_\gamma=\Gamma_0=0$ ist (es divergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty}q_{0,n}\,\gamma_1^{n_1}\cdots\gamma_r^{n_r}$).

zu brauchen wir nur zu zeigen, daß dies bei der eben benützten „Majorante“ [7]) $Q(w; z)$ zutrifft.

Wenn $\Gamma_\gamma = \Gamma_0$ ist, muß mindestens ein γ_ϱ, etwa $\gamma_1 > 0$ sein. Dann konvergiert bei beliebigem, positivem $\varepsilon < \gamma_1$ die Reihe

$\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty} q_{m,n} w^m (\gamma_1 - \varepsilon)^{n_1} \gamma_2^{n_2} \cdots \gamma_r^{n_r}$ für $|w| < \Gamma_\gamma(\gamma_1 - \varepsilon, \gamma_2, \ldots, \gamma_r) = \Gamma_\gamma(\varepsilon)$ absolut, und es gilt

$$\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty} q_{m,n} w^m (\gamma_1 - \varepsilon)^{n_1} \gamma_2^{n_2} \cdots \gamma_r^{n_r}$$

$$(17) \qquad = \frac{(w-1)\,(w^k + a_1(\gamma, \varepsilon)\, w^{k-1} + \cdots + a_k(\gamma, \varepsilon))}{(M+1)w^{k+1} - w^k + M\left(\dfrac{1}{(1-\gamma_1-\varepsilon)\,(1-\gamma_2)\cdots(1-\gamma_r)} - 1\right)}$$

$$= \frac{w-1}{(M+1)\,(w - \Gamma_\gamma(\varepsilon))}.$$

Wegen $\Gamma_\gamma(\varepsilon) > \Gamma_0$ liegen nämlich die k von $\Gamma_\gamma(\varepsilon)$ verschiedenen Nullstellen des Nenners der in (17) in der Mitte stehenden rationalen Funktion alle im Kreise $|w| < \Gamma_0$ [8]), also innerhalb des Konvergenzkreises $|w| < \Gamma_\gamma(\varepsilon)$ von $Q(w; \gamma, \varepsilon)$. Dann müssen sie aber auch Nullstellen des Zählers sein, woraus der rechtsstehende Ausdruck folgt. Für irgend ein festes, positives $w_0 < \Gamma_0$ strebt nun diese rechte Seite mit $\varepsilon \to 0$ gegen $\dfrac{w_0 - 1}{(M+1)\,(w_0 - \Gamma_0)}$, also auch die linke Seite. Das letztere wäre aber unmöglich, wenn $\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty} q_{m,n} w_0^m \gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_r^{n_r}$ divergieren würde (im vorliegenden Beispiel sind ja alle $q_{m,n} > 0$). Damit ist obige Lücke ausgefüllt.

---

[7]) Man müßte eigentlich, um die Behauptung in voller Allgemeinheit zu beweisen, anstelle von $B(w; z) = w^k$ etwa die Majorante $B(w; z) = \dfrac{1}{(1-w)(1-z_1)\ldots(1-z_r)}$ benützen. Die Rechnung ändert sich aber dann nur wenig.

Überhaupt hat $\mathfrak{B}(w; z)$ nur wenig Einfluß auf den Konvergenzbereich von $\mathfrak{Q}(w; z)$, und ohne Beweis sei noch bemerkt, daß, bei gleichbleibenden Voraussetzungen über $\mathfrak{P}(w; z)$, Satz 2 auch noch gilt, wenn nur $\mathfrak{B}(w; z)$ auf dem ganzen durch diesen Satz angegebenen Bereich und im Falle darüber hinaus noch für $|w| = \Gamma_0$. $|z_1|, = \gamma_1, \ldots, |z_r| = \gamma_r$ absolut konvergiert.

[8]) Für $\Delta_\gamma = 0$ werden diese k Nullstellen von $(M+1)\,w^{k+1} - w^k + \Delta_\gamma = 0$ alle 0, und ihre Lage ändert sich stetig, wenn Δ_γ stetig, von 0 bis $\Gamma_0^k - (M+1)\,\Gamma_0^{k+1}$ (exkl.) wächst. Daher müßte mindestens eine der Wurzeln den Kreis $|w| = \Gamma_0$ überschreiten, wenn die Behauptung falsch wäre. Das ist aber unmöglich, da für jedes $\Delta_\gamma < \Gamma_0^k - (M+1)\Gamma_0^{k+1}$ auf dem ganzen Kreis $|w| = \Gamma_0$ gilt:

$$|(M+1)w^{k+1} - w^k + \Delta_\gamma| > \Gamma_0^k - (M+1)\,\Gamma_0^{k+1} - \Delta_\gamma > 0.$$

Tübingen, Januar 1928.

Eingegangen 18. Mai 1928.

Über repartitive Mengeneigenschaften.

Von *Friedrich Levi* in Leipzig.

Bei einer Untersuchung aus der Theorie des Maßes [1]) hat vor kurzem Herr *E. Zermelo* darauf hingewiesen, daß der *Borel*sche Überdeckungssatz (für abgeschlossene Intervalle des n-dimensionalen Raumes) eine unmittelbare Folge eines von *Peano* aufgestellten Satzes [2]) ist, der sich allgemein auf kollektive Mengeneigenschaften bezieht. Dieser *Peano*sche Satz und der ältere Satz [3]) von *G. Cantor*, auf dem er beruht, sind bisher in der Literatur kaum beachtet worden; es bieten sich aber in der Analysis viele Gelegenheiten, diese Sätze anzuwenden und die Beweise dadurch wesentlich einfacher und durchsichtiger zu gestalten.

Im folgenden sollen die Überlegungen von *Cantor* und *Peano* verallgemeinert, ergänzt und ihre Anwendungsmöglichkeiten an Beispielen illustriert werden.

§ 1. Grundbegriffe.

Der Betrachtung liegen zu Grunde eine Klasse von (abzählbar, oder nicht abzählbar) unendlich vielen Punktmengen [4])

(1) $\quad \ldots\ldots J_\nu \ldots\ldots$

Sie sind alle in J_0 enthalten.

$\mathfrak{E}$ sei eine für alle J-Mengen (1) sinnvolle Eigenschaft,

$\bar{\mathfrak{E}}$ ihre Negation.

$\mathfrak{E}$ heißt „*distributiv*“, wenn aus:

(2) $\quad J_k = J_l \dotplus J_m$

folgt:

(3) Gilt $\mathfrak{E}$ für J_k, so gilt $\mathfrak{E}$ für $J_l \vee J_m$;

(3′) gilt $\mathfrak{E}$ für $J_l \vee J_m$, so gilt $\mathfrak{E}$ für J_k.

$\mathfrak{E}$ heißt „*kollektiv*“, wenn aus (2) folgt:

(4) Gilt $\mathfrak{E}$ für $J_l \& J_m$, so gilt $\mathfrak{E}$ für J_k;

(4′) gilt $\mathfrak{E}$ für J_k, so gilt $\mathfrak{E}$ für $J_l \& J_m$.

$\mathfrak{E}$ heißt „*repartitiv*“, wenn (3) und (4) aus (2) folgen.

Aus diesen Definitionen ergibt sich unmittelbar:

„Jede distributive und jede kollektive Eigenschaft ist zugleich repartitiv.

---

[1]) In Bd. 158 dieses Journals: Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen, S. 154—167.

[2]) *Giuseppe Peano*: Lezioni di Analisi infinitesimale, Vol. II (1893), S. 48 ff.; deutsch übersetzt in: *Angelo Genocchi*, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung (1899), Anhang V, S. 379—384. *Peano* betrachtet hier auch Eigenschaften, von denen nur die Bedingung (3) verlangt wird, und nennt sie „halbdistributiv“.

[3]) *Georg Cantor*: Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten Nr. 6, Math. Ann. 23 (1884), S. 453 ff.

[4]) Leere Mengen gelten in diesem Aufsatz nicht als Punktmengen.

zu brauchen wir nur zu zeigen, daß dies bei der eben benützten „Majorante“ [7]) $Q(w; z)$ zutrifft.

Wenn $\Gamma_\gamma = \Gamma_0$ ist, muß mindestens ein γ_ϱ, etwa $\gamma_1 > 0$ sein. Dann konvergiert bei beliebigem, positivem $\varepsilon < \gamma_1$ die Reihe

$\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty} q_{m,n}\, w^m\, (\gamma_1 - \varepsilon)^{n_1}\, \gamma_2^{n_2} \cdots \gamma_r^{n_r}$ für $|w| < \Gamma_\gamma(\gamma_1 - \varepsilon,\ \gamma_2, \ldots, \gamma_r) = \Gamma_\gamma(\varepsilon)$ absolut, und es gilt

$$\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty} q_{m,n}\, w^m\, (\gamma_1 - \varepsilon)^{n_1}\, \gamma_2^{n_2} \cdots \gamma_r^{n_r}$$

$$(17) \qquad = \frac{(w-1)\,(w^k + a_1(\gamma,\varepsilon)\, w^{k-1} + \cdots + a_k(\gamma,\varepsilon))}{(M+1)w^{k+1} - w^k + M\left(\dfrac{1}{(1-\gamma_1-\varepsilon)\,(1-\gamma_2)\cdots(1-\gamma_r)} - 1\right)}$$

$$= \frac{w-1}{(M+1)\,(w - \Gamma_\gamma(\varepsilon))}.$$

Wegen $\Gamma_\gamma(\varepsilon) > \Gamma_0$ liegen nämlich die k von $\Gamma_\gamma(\varepsilon)$ verschiedenen Nullstellen des Nenners der in (17) in der Mitte stehenden rationalen Funktion alle im Kreise $|w| < \Gamma_0$ [8]), also innerhalb des Konvergenzkreises $|w| < \Gamma_\gamma(\varepsilon)$ von $Q(w; \gamma, \varepsilon)$. Dann müssen sie aber auch Nullstellen des Zählers sein, woraus der rechtsstehende Ausdruck folgt. Für irgend ein festes, positives $w_0 < \Gamma_0$ strebt nun diese rechte Seite mit $\varepsilon \to 0$ gegen $\dfrac{w_0 - 1}{(M+1)\,(w_0 - \Gamma_0)}$, also auch die linke Seite. Das letztere wäre aber unmöglich, wenn $\sum_{\substack{m=0\\n=0}}^{\infty} q_{m,n}\, w_0^m\, \gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_r^{n_r}$ divergieren würde (im vorliegenden Beispiel sind ja alle $q_{m,n} > 0$). Damit ist obige Lücke ausgefüllt.

---

[7]) Man müßte eigentlich, um die Behauptung in voller Allgemeinheit zu beweisen, anstelle von $B(w; z) = w^k$ etwa die Majorante $B(w; z) = \dfrac{1}{(1-w)(1-z_1)\ldots(1-z_r)}$ benützen. Die Rechnung ändert sich aber dann nur wenig.

Überhaupt hat $\mathfrak{B}(w; z)$ nur wenig Einfluß auf den Konvergenzbereich von $\mathfrak{Q}(w; z)$, und ohne Beweis sei noch bemerkt, daß, bei gleichbleibenden Voraussetzungen über $\mathfrak{P}(w; z)$, Satz 2 auch noch gilt, wenn nur $\mathfrak{B}(w; z)$ auf dem ganzen durch diesen Satz angegebenen Bereich und im Falle darüber hinaus noch für $|w| = \Gamma_0$. $|z_1|, = \gamma_1, \ldots, |z_r| = \gamma_r$ absolut konvergiert.

[8]) Für $\Delta_\gamma = 0$ werden diese k Nullstellen von $(M+1)\, w^{k+1} - w^k + \Delta_\gamma = 0$ alle 0, und ihre Lage ändert sich stetig, wenn Δ_γ stetig, von 0 bis $\Gamma_0^k - (M+1)\,\Gamma_0^{k+1}$ (exkl.) wächst. Daher müßte mindestens eine der Wurzeln den Kreis $|w| = \Gamma_0$ überschreiten, wenn die Behauptung falsch wäre. Das ist aber unmöglich, da für jedes $\Delta_\gamma < \Gamma_0^k - (M+1)\,\Gamma_0^{k+1}$ auf dem ganzen Kreis $|w| = \Gamma_0$ gilt:

$$|(M+1)\, w^{k+1} - w^k + \Delta_\gamma| > \Gamma_0^k - (M+1)\,\Gamma_0^{k+1} - \Delta_\gamma > 0.$$

Tübingen, Januar 1928.

Eingegangen 18. Mai 1928.

Über repartitive Mengeneigenschaften.

Von *Friedrich Levi* in Leipzig.

Bei einer Untersuchung aus der Theorie des Maßes [1]) hat vor kurzem Herr *E. Zermelo* darauf hingewiesen, daß der *Borel*sche Überdeckungssatz (für abgeschlossene Intervalle des n-dimensionalen Raumes) eine unmittelbare Folge eines von *Peano* aufgestellten Satzes [2]) ist, der sich allgemein auf kollektive Mengeneigenschaften bezieht. Dieser *Peano*sche Satz und der ältere Satz [3]) von *G. Cantor*, auf dem er beruht, sind bisher in der Literatur kaum beachtet worden; es bieten sich aber in der Analysis viele Gelegenheiten, diese Sätze anzuwenden und die Beweise dadurch wesentlich einfacher und durchsichtiger zu gestalten.

Im folgenden sollen die Überlegungen von *Cantor* und *Peano* verallgemeinert, ergänzt und ihre Anwendungsmöglichkeiten an Beispielen illustriert werden.

§ 1. Grundbegriffe.

Der Betrachtung liegen zu Grunde eine Klasse von (abzählbar, oder nicht abzählbar) unendlich vielen Punktmengen [4])

(1) $\quad \ldots\ldots J_\nu \ldots\ldots$

Sie sind alle in J_0 enthalten.

$\mathfrak{E}$ sei eine für alle J-Mengen (1) sinnvolle Eigenschaft,

$\bar{\mathfrak{E}}$ ihre Negation.

$\mathfrak{E}$ heißt „*distributiv*“, wenn aus:

(2) $\quad J_k = J_l + J_m$

folgt:

(3) Gilt $\mathfrak{E}$ für J_k, so gilt $\mathfrak{E}$ für $J_l \vee J_m$;

(3′) gilt $\mathfrak{E}$ für $J_l \vee J_m$, so gilt $\mathfrak{E}$ für J_k.

$\mathfrak{E}$ heißt „*kollektiv*“, wenn aus (2) folgt:

(4) Gilt $\mathfrak{E}$ für $J_l \& J_m$, so gilt $\mathfrak{E}$ für J_k;

(4′) gilt $\mathfrak{E}$ für J_k, so gilt $\mathfrak{E}$ für $J_l \& J_m$.

$\mathfrak{E}$ heißt „*repartitiv*“, wenn (3) und (4) aus (2) folgen.

Aus diesen Definitionen ergibt sich unmittelbar:

„Jede distributive und jede kollektive Eigenschaft ist zugleich repartitiv.

---

[1]) In Bd. 158 dieses Journals: Über das Maß und die Diskrepanz von Punktmengen, S. 154—167.

[2]) *Giuseppe Peano*: Lezioni di Analisi infinitesimale, Vol. II (1893), S. 48 ff.; deutsch übersetzt in: *Angelo Genocchi*, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung (1899), Anhang V, S. 379—384. *Peano* betrachtet hier auch Eigenschaften, von denen nur die Bedingung (3) verlangt wird, und nennt sie „halbdistributiv“.

[3]) *Georg Cantor*: Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten Nr. 6, Math. Ann. 23 (1884), S. 453 ff.

[4]) Leere Mengen gelten in diesem Aufsatz nicht als Punktmengen.

Ist $\mathfrak{E}$ repartitiv, so ist $\overline{\mathfrak{E}}$ repartitiv;
ist $\mathfrak{E}$ distributiv, so ist $\overline{\mathfrak{E}}$ kollektiv;
ist $\mathfrak{E}$ kollektiv, so ist $\overline{\mathfrak{E}}$ distributiv".

In den sich zunächst bietenden Anwendungen sind J_ν die Durchschnitte von J_0 mit den Vereinigungsmengen beliebig (endlich) vieler offener Intervalle des n-dimensionalen kartesischen Raumes, also J_0 beschränkt. Man hat aber die Freiheit, auch andere Systeme von Mengen (z. B. alle Gebiete, alle Kontinua, alle einfach zusammenhängenden Bereiche usw.) als Systeme der J-Mengen zu wählen und die Untersuchung auf andersgeartete Räume (vgl. § 5) zu erstrecken. Wesentlich für die Gültigkeit der allgemeinen Sätze des § 2 sind nur die folgenden beiden Bedingungen:

a) Es gibt unter den J-Mengen ein System

$$J^1, J^2, J^{11}, J^{12}, J^{21}, J^{22}, \ldots, J^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m}, \ldots, \tag{5}$$

deren Indizes alle endlichen Dualzahlen durchlaufen. Dabei ist

$$J_0 = J^1 \dotplus J^2, \ldots, J^{\mu_1 \cdots \mu_m} = J^{\mu_1 \cdots \mu_m 1} \dotplus J^{\mu_1 \cdots \mu_m 2},$$

und zu jeder unendlichen Dualzahl $\mu_1 \mu_2 \ldots$ gibt es einen Punkt $P_{\mu_1 \mu_2 \ldots}$, so daß in jeder Menge, die $P_{\mu_1 \mu_2 \ldots}$ als inneren [5]) Punkt enthält, auch ein $J^{\mu_1 \cdots \mu_m}$ liegt. [$\mu_1 \ldots \mu_m$ ein beliebiger endlicher Abschnitt der unendlichen Dualzahl $\mu_1 \mu_2 \ldots$].

b) Ist J_k Vereinigungsmenge endlich vieler J_ν, so kann man diese so mit $J_{\nu_1}, \ldots, J_{\nu_n}, J_{\nu_{n+1}}$ bezeichnen, daß auch

$$\mathfrak{M}_2 = J_{\nu_1} \dotplus J_{\nu_2}, \quad \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_2 \dotplus J_{\nu_3}, \ldots, \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{n-1} \dotplus J_{\nu_n}$$

J-Mengen sind.

§ 2. Hauptsätze.

I. *Distributivsatz* (*G. Cantor*): „Bedingung a) sei erfüllt und J_0 abgeschlossen. Ist dann $\mathfrak{D}$ eine in J_0 gültige distributive Eigenschaft, so gibt es in J_0 einen Punkt Q derart, daß $\mathfrak{D}$ für alle J-Mengen gilt, die Q als inneren Punkt enthalten".

Beweis: Unter den J-Mengen (5) muß es [wegen (3)] eine unendliche Folge $J^{\mu_1}, J^{\mu_1 \mu_2}, \ldots$ geben, für welche die distributive Eigenschaft $\mathfrak{D}$ gilt. Jedes J_ν, das $P_{\mu_1 \mu_2 \ldots}$ als inneren Punkt enthält, muß dann ein $J^{\mu_1 \cdots \mu_m}$ enthalten, und für $J_\nu = J^{\mu_1 \cdots \mu_m} \dotplus J_\nu$ gilt [nach (3')] $\mathfrak{D}$. Da J_0 abgeschlossen ist, gehört $P_{\mu_1 \mu_2 \ldots}$ zu J_0 und hat daher alle für Q geforderten Eigenschaften.

II. *Kollektivsatz* (*G. Peano*): „Bedingung a) sei erfüllt und J_0 abgeschlossen. Ist dann jeder Punkt von J_0 innerer Punkt einer J-Menge, für welche die kollektive Eigenschaft $\mathfrak{K}$ gilt, so ist $\mathfrak{K}$ auch für J_0 gültig".

Beweis: Würde für J_0 die distributive Eigenschaft $\overline{\mathfrak{K}}$ gelten, so müßte es [nach I] in J_0 einen Punkt Q geben, derart, daß für jedes J_ν, das Q als inneren Punkt enthält, $\overline{\mathfrak{K}}$ gilt — entgegen der Voraussetzung.

III. *Borelscher Überdeckungssatz*: „Bedingung a) sei erfüllt, J_0 abgeschlossen, $\ldots \mathfrak{M}_\nu \ldots$ eine Klasse von Punktmengen und jeder Punkt von J_0 innerer Punkt von mindestens einem $\mathfrak{M}_\nu$. Dann ist $J_0 < \mathfrak{M}_{\nu_1} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{M}_{\nu_n}$".

[5]) Die Bezeichnungen „innerer Punkt", „offene Punktmenge" u. s. w. sind immer relativ zu J_0 zu verstehen. D. h.: Es ist P innerer Punkt der Menge $\mathfrak{A} < J_0$, wenn es eine Umgebung von P gibt, die frei von Punkten des Komplements $J_0 - \mathfrak{A}$ ist.

Beweis: Man adjungiere zu den J_ν noch sämtliche [4]) Durchschnitte $J_0\mathfrak{M}_\nu$; die Gültigkeit der Voraussetzungen wird dadurch nicht betroffen. Da die Eigenschaft, von endlich vielen $\mathfrak{M}_\nu$ überdeckbar zu sein, kollektiv ist, so folgt III unmittelbar aus II.

IV. *Repartitivsatz*: „Die Bedingungen a) und b) seien erfüllt, J_0 abgeschlossen, $\mathfrak{R}$ repartitiv. 1. Ist jeder Punkt von J_0 innerer Punkt einer J-Menge, für die $\mathfrak{R}$ gilt, so ist $\mathfrak{R}$ für J_0 gültig. 2. Gilt $\mathfrak{R}$ für J_0, so gibt es in J_0 einen Punkt Q derart, daß $\mathfrak{R}$ in allen J-Mengen gilt, die Q als inneren Punkt enthalten".

Beweis: 1. Nach III muß J_0 die Vereinigungsmenge von endlich vielen J-Mengen sein, für die $\mathfrak{R}$ gilt. Sie werden [nach b)] so mit $J_{\nu_1}, \ldots, J_{\nu_{n+1}}$ bezeichnet, daß $\mathfrak{M}_2 = J_{\nu_1} \dot{+} J_{\nu_2}, \ldots, \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{\nu_{n-1}} \dot{+} J_{\nu_n}$ auch J-Mengen sind; für sie gilt dann [nach (4)] auch die repartitive Eigenschaft $\mathfrak{R}$. Dann muß $\mathfrak{R}$ für $\mathfrak{M}_n \dot{+} J_{\nu_{n+1}} = J_0$ gelten. 2. Würde jeder Punkt von J_0 innerer Punkt eines J_ν sein, in dem nicht $\mathfrak{R}$ sondern $\overline{\mathfrak{R}}$ gilt, so müßte [nach IV, 1], da $\overline{\mathfrak{R}}$ gleichfalls repartitiv ist, $\overline{\mathfrak{R}}$ auch für J_0 gelten.

Soweit die Bedingung b) erfüllt ist, sind I und II Spezialfälle von IV. Wählt man aber z. B. die J_ν als die Durchschnitte von J_0 mit den einfach zusammenhängenden Gebieten, so versagt IV in den Räumen von mehr als 2 Dimensionen, während I und II Anwendung finden können (Beispiel hierzu in § 5).

§ 3. Anwendungen.

In diesen Anwendungen wird ein n-dimensionaler kartesischer Raum zu Grunde gelegt; J_0 sei ferner abgeschlossen und beschränkt. $f(P)$ ist eine in J_0 definierte Funktion. In den ersten drei Beispielen ist

$$J_\nu = J_0 I_\nu, \tag{7}$$

wobei I_ν alle [4]) Vereinigungsmengen endlich vieler offener n-dimensionaler Intervalle durchläuft.

1. Die Eigenschaft: „$f(P)$ ist in J_ν beschränkt" ist kollektiv. Folglich (nach II): „Hat jeder Punkt der (n-dimensionalen, abgeschlossenen und beschränkten) Menge J_0 eine Umgebung, in der $f(P)$ beschränkt ist, so ist $f(P)$ in J_0 beschränkt".

2. Die Eigenschaften:

$$\text{fin. sup. } f(P) = a \tag{8'}$$

$$\text{fin. inf. } f(P) = b \tag{8''}$$

sind repartitiv. Folglich [nach IV]: „Gilt (8') [bzw. (8'')] in der (n-dimensionalen, abgeschlossenen und beschränkten) Menge J_0, so gibt es in J_0 einen Punkt Q_1 [bzw. Q_2], so daß in jeder Umgebung von Q_1[bzw. Q_2] bezüglich J_0 die Gleichung (8') [bzw. (8'')] gilt".

3. Gibt es zu J_ν ein positives δ_ν derart, daß die Schwankung von $f(P)$ in allen Durchschnitten von J_ν mit in I_ν gelegenen Intervallen, deren Kantenlängen δ_ν nicht übersteigen, kleiner als a ist, so soll J_ν die Eigenschaft $\mathfrak{E}_{f,a}$ zukommen.

$\mathfrak{E}_{f,a}$ genügt der Bedingung (4'); es wird gezeigt, daß $\mathfrak{E}_{f,a}$ auch (4) genügt. Es sei $I_k = I_l \dot{+} I_m$, und daher (2) gültig. Haben I_l und I_m keinen gemeinsamen Punkt, so genügt es $0 < \delta_k < \delta_l$ & δ_m zu setzen. Im andere Falle ist $I_l I_m$ eine offene Intervallsumme mit der kleinsten Kante $\delta' > 0$. Jedes Intervall in I_k, dessen Kanten alle $< \delta'$ sind, liegt dann in I_m oder I_l. Man braucht also nur $0 < \delta_k < \delta'$ & δ_l & δ_m zu wählen. $\mathfrak{E}_{f,a}$ ist also kollektiv, und es gilt: „Hat jeder Punkt der (n-dimensionalen abgeschlossenen und beschränkten) Menge J_0 eine Umgebung, für die $\mathfrak{E}_{f,a}$ gilt, so ist $\mathfrak{E}_{f,a}$ in J_0 gültig".

4. J_0 sei ein abgeschlossenes, beschränktes, stetiges Kurvenstück, J_ν die abgeschlossenen zusamenhängenden Teile von J_0. a) und b) sind also erfüllt. $\mathfrak{D}_{f,a}$ sei die Eigen-

schaft eines J_ν, daß $f(P)$ in J_ν sowohl Werte $\leqq a$ als auch Werte $\geqq a$ annimmt. In (2) müssen J_l und J_m immer mindestens einen Punkt gemeinsam haben; daraus folgt, daß $\mathfrak{D}_{f,a}$ distributiv ist. Es gibt also einen Punkt Q, in dessen sämtlichen Umgebungen $\mathfrak{D}_{f,a}$ gilt. Da man aber in einem beliebigen zusammenhängenden Bereiche je zwei Punkte durch ein J_0 verbinden kann, so folgt:

„Ist $f(P)$ in einem zusammenhängenden Bereiche B des n-dimensionalen Raumes definiert und nimmt dort sowohl Werte $\leqq a$ als auch Werte $\geqq a$ an, so gibt es in B einen Punkt, in dessen sämtlichen Umgebungen $f(P)$ sowohl Werte $\leqq a$ als auch Werte $\geqq a$ annimmt".

Als Spezialfall ergibt sich aus 1—4:

„Eine stetige Funktion ist auf einer beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge beschränkt, gleichmäßig stetig und nimmt Maxima und Minima an. In einem zusammenhängenden Bereich nimmt sie mit je zwei Werten auch alle Zwischenwerte an."

§ 4. Zusätze.

Durch I [bzw. IV] ist jeder distributiven [bzw. repartitiven] Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von J_0 eine Menge von Punkten Q (mindestens einer) zugeordnet. Ist H ein Häufungspunkt der Punkte Q, so muß jedes J_ν, das H als inneren Punkt enthält, auch Punkte Q als innere Punkte enthalten. Also muß $\mathfrak{E}$ in J_ν gelten, und H ist ein Punkt Q. Folglich:

„Die Menge der Punkte Q ist in jedem Falle abgeschlossen".

Die Eigenschaft: „J_ν enthält unendlich viele Punkte der Menge $\mathfrak{A}$" ist distributiv. Es liefert daher I den *Weierstraß*schen Häufungsstellensatz, und aus dem eben genannten Zusatz ergibt sich, daß die Ableitung von $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist. Auch in anderen Fällen ist dieser Zusatz als Kriterium der Abgeschlossenheit brauchbar.

Es liege der Fall vor, daß die Vereinigungsmenge zweier J-Mengen immer wieder eine J-Menge ist. Die distributive Eigenschaft $\mathfrak{D}$ definiert nach IV die Menge der Punkte Q. Die abgeschlossene Hülle H_{J_ν} von J_ν enthalte keinen Punkt Q. Nach IV und III kann man dann $J_\nu < J_{\nu_1} \dot{+} \cdots \dot{+} J_{\nu_k} \equiv J_\mu$ setzen, wobei den $J_{\nu_1}, \ldots, J_{\nu_k}, J_\mu$ die Eigenschaft $\mathfrak{D}$ zukommt. Wegen $J_\mu = J_\mu \dot{+} J_\nu$ muß $\mathfrak{D}$ auch für J_ν gelten.

Im betrachteten Falle ist also dafür, daß J_ν die distributive Eigenschaft $\mathfrak{D}$ zukomme, notwendig, daß H_{J_ν} einen Punkt Q enthält [dagegen ist hierfür immer hinreichend, daß ein Punkt Q innerer Punkt von J_ν ist].

Von gewisser Bedeutung ist folgender Spezialfall: „die Volldistributivität".

1. Raum n-dimensional, kartesisch.
2. $J_\nu = J_0 I_\nu$; I_ν soll alle abgeschlossenen n-dimensionalen Intervalle durchlaufen.
3. Gilt in J_ν die im übrigen distributive Eigenschaft $\mathfrak{D}$, so kann man I_ν durch eine Ebene so in I_{ν_1} und I_{ν_2} zerspalten, daß $\mathfrak{D}$ auch in J_{ν_1} und J_{ν_2} gilt.

Man kann daraus schließen, daß, wenn $\mathfrak{D}$ in J_ν gilt, dasselbe für zwei gewisse Teilmengen von J_ν ohne gemeinsamen Punkt zutrifft. Da außerdem jedes $J_\nu[\equiv H_{J_\nu}]$, in dem $\mathfrak{D}$ gilt, einen Punkt Q enthalten muß, so muß jedes I_ν, in dessen Inneren ein Punkt Q liegt, zwei solche Punkte enthalten. Also:

„Ist $\mathfrak{D}$ volldistributiv, so ist die zugehörige Menge der Punkte Q perfekt".

Im n-dimensionalen kartesischen Raum ist die Eigenschaft einer Menge, mehr als abzählbar viele Punkte einer nicht abzählbaren Menge $\mathfrak{A}$ zu enthalten, volldistributiv; ebenso die Eigenschaften: maßhaltig sein, diskrepant [1]) sein. Daraus folgt, daß die Mengen der Kondensationspunkte, der Maßpunkte, der Diskrepanzpunkte perfekt sind. Auch bei den bekannten Beispielen von nirgends dichten perfekten Mengen läßt sich der Nachweis der Perfektheit am einfachsten in dieser Art erbringen.

§ 5. Allgemeine metrische Räume — topologische Räume.

Für die allgemeinen metrischen Räume hat *W. Groß* [6]) die Gültigkeit des *Borel*schen Überdeckungssatzes nachgewiesen, wenn die Mengen abgeschlossen und kompakt sind. Man kann die Überlegungen aus dem letzten Abschnitte des *Groß*schen Beweises dazu benutzen, um die Anwendbarkeit der Sätze I—IV (und damit auch des *Borel*schen Überdeckungssatzes) in diesem Falle mit einem Schlage darzutun.

J_0 abgeschlossen und kompakt,

$$J_\nu = J_0 I_\nu,$$

wobei durch I_ν alle endlichen Vereinigungsmengen der Durchschnitte endlich vieler Distanzkugeln dargestellt werden. Bedingung b) ist dann erfüllt. Da es ferner in einer kompakten abgeschlossenen Menge nur endlich viele Punkte geben kann, deren Distanzen größer als eine gegebene Zahl sind, so kann man jedes J_ν mit endlich vielen Distanzkugeln eines beliebig vorgegebenen Radius bedecken. Man kann daher die Folge (5) der $J^{\mu_1 \cdots \mu_m}$ so bestimmen, daß für $m \geqq m_i$ die J-Menge $J^{\mu_1 \cdots \mu_m}$ in einer Distanzkugel vom Radius 2^{-i} liegt.

Der Durchmesser dieser Menge ist also nicht größer als $f(2^{-i})$, konvergiert aber mit wachsendem i gegen 0. A^{μ_1} sei ein Punkt aus J^{μ_1}, $A^{\mu_1 \mu_2}$ aus $J^{\mu_1 \mu_2}$, ..., $A^{\mu_1 \cdots \mu_m}$ aus $J^{\mu_1 \cdots \mu_m}$, ..., A ein Häufungspunkt der $A^{\mu_1 \cdots \mu_m}$. In jeder Distanzkugel mit dem Zentrum A und dem beliebigen Radius r muß dann ein Punkt $A^{\mu_1 \cdots \mu_\varrho}$ liegen, der aus einer J-Menge $J^{\mu_1 \cdots \mu_\varrho}$ mit einem Durchmesser $< r$ ausgewählt ist. Dann liegt $J^{\mu_1 \cdots \mu_\varrho}$ in der Distanzkugel um A mit dem Radius $f(r)$. In jeder Menge, die A als inneren Punkt enthält, muß dann ein $J^{\mu_1 \cdots \mu_m}$ liegen. A hat also die in a) von $P_{\mu_1 \mu_2 \ldots}$ verlangten Eigenschaften.

Die Sätze I—IV gelten also in den kompakten metrischen Räumen.

In etwas spezielleren metrischen Räumen — z. B. in Überlagerungsräumen kartesischer Räume — kann man über die J-Mengen auch andere Annahmen machen. Es seien z. B. die J-Mengen die einfach zusammenhängenden Gebiete eines beschränkten, einfach zusammenhängenden, abgeschlossenen Bereiches J_0 in einem solchen Überlagerungsraum. Diese Annahme wird benutzt, um die Frage der Unabhängigkeit der Integrale vom Wege zu untersuchen. Die zulässigen Integrationswege können dabei noch durch gewisse Bedingungen eingeschränkt werden. Vorausgesetzt wird aber, daß man in jedem Gebiet von J_0 je zwei Punkte durch einen Integrationsweg verbinden kann, sowie, daß man durch einen beliebigen Punkt des Integrationsweges diesen in zwei Integrationswege zerlegt und umgekehrt. Von den Integralen wird nur vorausgesetzt:

$$\int_{A\,(w)}^{B} = -\int_{B\,(w)}^{A}, \qquad \int_{A\,(w_1)}^{B} + \int_{B\,(w_2)}^{C} = \int_{A\,(w_1 + w_2)}^{C}.$$

Ist nun

(1) $$J_k = J_l \dotplus J_m,$$

so ist $J_l J_m$ zusammenhängend.

---

[6]) *Wilhelm Groß*: Zur Theorie der Mengen, in denen ein Distanzbegriff definiert ist, Wien. Ber. **123** (1914), S. 801—819. — Definitionen und Bezeichnungen dieser Arbeit werden hier benutzt. Das „Dreiecksaxiom" lautet also: Sind die Distanzen AB und $AC < \varrho$, so ist die Distanz $BC < f(\varrho)$ und $\lim_{\varrho \to 0} f(\varrho) = 0$.

Sind A in J_l und C in J_m durch zwei Integrationswege w und w' in J_k verbunden, so kann man diese durch Punkte B und B', die in $J_l J_m$ liegen, in je zwei Integrationswege w_1 und w_2 bzw. w_1' und w_2' zerlegen, ferner B und B' durch einen Integrationsweg w_0 verbinden. Ist in J_l und J_m das Integral vom Wege unabhängig, so sind die Integrale längs der Wege

$$AwC, \quad Aw_1Bw_2C, \quad Aw_1Bw_0B'w_0Bw_2C, \quad Aw_1'B'w_2'C, \quad Aw'C$$

alle gleich, das Integral in J_k vom Wege unabhängig. Es handelt sich also um eine kollektive Eigenschaft. Hat daher jeder Punkt von J_0 eine Umgebung, in der das Integral vom Wege unabhängig ist, so ist (bei den über J_0 gemachten Voraussetzungen) auch in J_0 das Integral vom Wege unabhängig.

Die Sätze des § 2 lassen sich auch auf gewisse topologische Räume anwenden. Dabei ist zu beachten, daß Satz IV aus Satz III und der Bedingung b) allein folgt. Diese Methode läßt sich z. B. auf folgenden einfach geordneten topologischen Raum anwenden:

Punkte: $P_i \equiv (x_i, y_i), \quad 0 \leqq x_i \leqq 1, \quad 0 \leqq y_i \leqq 1.$

$$P_1 < P_2, \quad \text{wenn} \quad x_1 < x_2, \quad \text{oder} \quad x_1 = x_2,\ y_1 < y_2.$$

Für die Intervalle $P_i \leqq P \leqq P_k$ als J-Mengen gilt dann b) und — wie leicht nachzuweisen — auch der *Borel*sche Überdeckungssatz; also auch Satz IV. Dagegen gilt der *Lindelöf*sche Überdeckungssatz hier nicht; dieser ist also keine Folgerung des Repartitivsatzes und läßt sich nicht ohne Eingehen auf die feineren Eigenschaften des Zahlenkontinuums beweisen.

Leipzig 20. Mai 1928.

Eingegangen 21. Mai 1928.

Elementarer Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Logik-Kalküls.

Von *Walter Dubislav* in Berlin-Friedenau.

Das *Whitehead-Russell*sche Axiomensystem [1]) lautet, wenn man es mit *P. Bernays* [2]) vereinfacht und noch einige die Schlußregeln betreffende Verschärfungen anbringt, folgendermaßen, wobei die von W. und R. im Hinblick auf ihre Hierarchie der Typen eingeführten Axiome nicht in Betracht gezogen werden.

Schluß- bzw. Operationsregeln (Formale Axiome):

I. Substitutionsregel (Axiom der Substitution): In jeder Formel, in der eine Aussagenvariable, sagen wir p, vorkommt, darf sie durch irgendeine andere, sagen wir q, ersetzt werden bzw. durch $\sim q$ bzw. $q \vee r$, sofern man an jeder Stelle, wo p in der betreffenden Formel vorkommt, dieselbe Substitution vornimmt.

Hierbei wird unter einer Formel jedes Gebilde verstanden, welches entsteht, wenn man irgendeine Aussagenvariable, sagen wir p, als eine Formel betrachtet, und nun auf p die oben angegebene Substitutionsregel beliebig oft anwendet.

II. Axiom der Deduktion (Modus-ponens-Axiom bzw. -Regel): Wenn die Formeln A und $A \,) B$ abgeleitete sind, so ist auch die Formel B als eine abgeleitete zu betrachten.

Hierbei wird unter der Ableitbarkeit einer Formel folgendes verstanden: (a) ist Formel F eine Ausgangsformel, d. h. eine der vier weiter unten anzugebenden Formeln, so heiße sie eine abgeleitete oder kurz ableitbar; (b) ist Formel F aus einer abgeleiteten Formel durch Anwendung der Substitutionsregel hervorgegangen, so heiße sie ableitbar; (c) ist von Formel F in Verbindung mit einer Formel E bekannt, daß sowohl E wie $E \,) F$ abgeleitete Formeln sind, so heiße F ableitbar.

Ausgangsformeln (Materiale Axiome): Wir setzen für $\sim p \vee q$ immer $p \,) q$

Formel I: $p \vee p. \,). \, p$
Formel II: $q. \,). \, p \vee q$
Formel III: $p \vee q. \,). \, q \vee p$
Formel IV: $q \,) \, r \,. \,) : p \vee q. \,). \, p \vee r.$

Von diesem Kalkül, der, in der bekannten Weise inhaltlich gedeutet, die elementare Lehre vom Schluß darstellt, wollen wir zeigen, daß er keinen Widerspruch enthält. Hierbei bedeutet die Aussage, der Kalkül ist widerspruchsfrei, folgendes: Es ist nicht möglich, sowohl eine Formel wie die Negation derselben abzuleiten. Inhaltlich gedeutet besagt das, es gibt innerhalb der elementaren Lehre vom Schluß kein Paar von Behaup-

[1]) *Whitehead* und *Russel*, Principia Mathematica, 2. Aufl., 1925, S. 91 ff.

[2]) *P. Bernays*, Axiomatische Untersuchung d. Aussagen-Kalküls d. „Principia Mathematica", Mathematische Zeitschrift 1926, S. 305 ff.

tungen derart, das die eine die Negation der anderen ist. Bei der von uns gesuchten Begründung wie allen analogen Begründungen von Behauptungen, welche sich darstellen als Behauptungen über Eigenschaften, die gewisse Systeme von Behauptungen haben bzw. die Formeln, als deren Deutung man gegebenenfalls diese letzteren Behauptungen auffassen kann, ist es notwendig, die innerhalb des Systems in üblicher Weise ableitbaren Behauptungen bzw. Formeln zu unterscheiden von den Behauptungen, die man über das System begründen will. Die Begründungen von Behauptungen über das System wollen wir „Nachweise" (in unserem Falle metalogische Nachweise) nennen, im Unterschiede zu den innerhalb des Systems verlaufenden bündigen Begründungen, die kurz „Beweise" heißen mögen. Der erste, nebenbei bemerkt, der diese innerhalb der *Hilbert*schen Axiomatik üblich gewordene Unterscheidung gemacht hat, war *J. F. Fries*, welcher sie bei denjenigen Begründungen benutzt hat, die er Demonstrationen bzw. die er Deduktionen nannte. Zu beachten ist noch, daß man bei einem solchen Nachweis natürlich von dem sog. finiten, inhaltlich in mancherlei Weise belasteten Erkennen wird Gebrauch zu machen haben. Die Leistung eines solchen Nachweises liegt also darin, daß er sonst lediglich durch zweifelhafte Berufung auf unmittelbare Erkenntnisse sich stützende Einsichten von der Widerspruchslosigkeit oder Vollständigkeit usw. eines Systems zu ersetzen gestattet durch leicht überschaubare, im Finiten verlaufende explizit angebbare Begründungen.

Der Gedankengang unseres völlig elementaren Nachweises der Widerspruchslosigkeit zunächst des einfachen Logik-Kalküls, d. h. des obigen Axiomsystems, ist der folgende. Wir geben eine Eigenschaft E an, die jede Ausgangsstellung des Kalküls besitzt. Dann weisen wir nach, daß alle durch Anwendung der beiden Schlußregeln aus den Ausgangsformeln ableitbaren neuen Formeln diese Eigenschaft E ebenfalls besitzen. Schließlich weisen wir nach, daß, sofern das System nicht ein widerspruchsloses wäre, es eine ableitbare Formel innerhalb des Systems geben müßte, die diese Eigenschaft E nicht besäße. Da nun aber jede innerhalb des Systems ableitbare Formel diese Eigenschaft E besitzt, so muß das System ein widerspruchsloses sein. Bei dem Nachweis stützen wir uns wesentlich auf die Abhandlung von *Emil L. Post*, Introduction to a general theory of elementary propositions, American Journal of Mathematics, 1921, S. 163 ff. Man vergleiche auch noch die Abhandlung von *J. von Neumann*, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Mathematische Zeitschrift, 1927, S. 1 ff.

Fußend auf *E. L. Post*, der zugleich mit *L. Wittgenstein*, Tractatus Logico-Philosophicus, 1922, die ausgiebige Benutzung von Werttafeln logischer Funktionen aufgebracht hat, wählen wir als Eigenschaft E die Eigenschaft der Ausgangsformeln, als Werttafeln im *Post*schen Sinne Plus-Werttafeln zu besitzen, d. s. solche Werttafeln, die in der letzten rechts stehenden Kolonne nur Pluszeichen als Wertzeichen haben. Vereinbarungsgemäß ordnen wir jeder unmodifizierten Aussagenvariablen, d. h. jedem im Kalkül vorkommenden (kleinen lateinischen) Buchstaben $p, q, \ldots, w$ als Werte die Zeichen $+$ bzw. $-$ zu. Ferner erteilen wir willkürlich der Negation-Funktion, d. h. der Zeichenzusammenstellung $\sim p$ die Werttafel

p	$\sim p$
$+$	$-$
$-$	$+$

und der Disjunktion-Funktion, d. h. der Zeichenzusammenstellung $p \vee q$ die Werttafel

p	q	$p \vee q$
$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$+$
$-$	$-$	$-$

.

Da alle Formeln des Kalküls, wenn wir noch der unmodifizierten Aussagenvariablen, d. h. dem Zeichen p, die identische Werttafel

p	p
+	+
−	−

zuordnen, aus den eben angegebenen Werttafeln Schritt für Schritt ermittelt werden können, entsprechend und auf Grund der Entstehung jeder Formel aus der unmodifizierten Aussagenvariablen p gemäß der Substitutionsvorschrift, so kann man eine vorhandene oder nicht vorhandene Eigenschaft E einer Formel angeben, die lautet: „Eine Plus-Werttafel als Werttafel besitzen". Eine Formel mit dieser Eigenschaft E möge kurz eine Plus-Formel heißen; jede andere eine N-Formel (Nicht Plus-Formel). Wir haben nun zu zeigen, daß erstens jede der vier Ausgangsformeln eine Plus-Formel ist, und daß zweitens jede aus den Ausgangsformeln ableitbare Formel ebenfalls eine Plusformel ist. Von der Richtigkeit der ersten Behauptung überzeuge man sich durch die Aufstellung der Werttafeln. Was die zweite Behauptung anbelangt, so schließen wir ganz elementar so: Aus einer Plus-Formel kann durch Anwendung der Substitutionsregel nur eine Plus-Formel entstehen. Ist nämlich eine Formel eine Plus-Formel, so bleibt sie es ersichtlich, wenn man eine in ihr enthaltene unmodifizierte Variable durch eine andere ersetzt. Ersetzt man sie aber durch ihre Negation, so bedeutet das ersichtlich auch keine Änderung in der rechten Kolonne der ursprünglichen Plus-Werttafel der betreffenden Formel. Ersetzt man sie schließlich durch eine Disjunktion zweier unmodifizierter Variablen, so ändert sich die betreffende Kolonne der Werttafel der Formel auch nicht, weil die ursprüngliche Formel eine Plus-Formel, d. h. ihre Werttafel eine Plus-Werttafel war. Durch einmalige Anwendung der Substitutionsregel erhält man mithin aus einer Plus-Formel immer eine Plus-Formel, und durch einen trivialen Schluß kann man zeigen, daß man vermittelst der Substitutionsregel aus Plusformeln nur Plus-Formeln zu erzeugen in der Lage ist. Wir haben also noch nachzuweisen, daß auch die zusätzliche Verwendung des Modus-ponens-Axioms aus Plusformeln immer nur Plus-Formeln entstehen läßt. Das liegt auf der Hand, denn, wenn man bei einer Ableitung einer Formel das Modus-ponens-Axiom überhaupt benutzt, so benutzt man es einmal zum erstenmal. Bei der erstmaligen Benutzung, es möge auf die beiden ableitbaren Formeln A und $A \,)\, B$ angewendet werden, ist die Formel A entweder Ausgangsformel oder aus den Ausgangsformeln durch alleinige Anwendung der Substitutionsregel hervorgegangen. Formel A ist mithin eine Plus-Formel. Deshalb ist, weil aus demselben Grunde auch Formel $A \,)\, B$ eine Plus-Formel ist, gemäß der Werttafel der Implikationsbeziehung

p	q	$p \,)\, q$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

auch Formel B eine Plus-Formel. Durch einen trivialen Schluß kann man dies Ergebnis wieder verallgemeinern. Alle aus den Ausgangsstellungen (vermittels endlich vieler Manipulationen) ableitbaren Formeln sind mithin Plus-Formeln.

Wäre das System nun ein mit einem Widerspruch behaftetes, so würde man eine Formel A und ihre Negation (ihre Negat-Formel) $\sim A$ ableiten können. Weil aber innerhalb des Systems die Formel: $\sim A .) . A) \, q$ ableitbar ist, es handelt sich in der Numerierung der Principia Mathematica um eine triviale Folge der Formel 2, 21, so müßte man im System die Formel q ableiten können. Diese Formel ist aber gemäß der identischen Werttafel eine N-Formel. Das kann aber nicht sein, denn

alle ableitbaren Formeln des Systems sind, gemäß unsereren Ergebnissen, Plus-Formeln. Das System ist mithin ein widerspruchsloses.

Dieses Resultat ist nun auch für den Kalkül, der mit „alle" und „einige" operiert, zu begründen. Der betreffende Kalkül ergibt sich aus den einfachen durch Einführung eines Zusatzes zur Substitutionsregel, durch Erweiterung der Modus-ponens-Regel auch auf die neu hinzukommenden Formeln, die Funktions- und Individuenvariable enthalten, und durch Aufstellung zweier neuer Ausgangsformeln nebst den bekannten Regeln über das Operieren mit Klammern und Punkten bei Ausdrücken der Form $(x) \cdot \Phi x$ bzw. $(\exists x) \cdot \Phi x$ so beschaffen, daß auf die in ihnen enthaltene Variable x die Substitutionsregel nicht angewendet wird.[3])

Der Zusatz zur Substitutionsregel lautet: In jeder Formel, in der ein Zeichen der Art Φx vorkommt, darf für Φx gesetzt werden ψx bzw. $\sim \psi x$ bzw. $\psi x \vee \chi x$, sofern man an jeder Stelle, wo Φx in der betreffenden Formel vorkommt, dieselbe Substitution vornimmt und gegebenenfalls für Φa setzt ψa bzw. $\sim \psi a$ bzw. $\psi a \vee \chi a$. Hierbei ist die ursprüngliche Definition dessen, was eine Formel ist, folgendermaßen zu vervollständigen: Aus jedem Gebilde, sagen wir kurz G, das nach der ursprünglichen Definition eine Formel ist, geht eine neue hervor, wenn man in G für eine in G vorkommende Aussagenvariable (Buchstabe $p, q, r, \ldots$) nach Willkür setzt Φa oder $\Phi b, \ldots$ bzw. $\sim \psi a$ oder $\sim \psi b, \ldots$ bzw. $\psi a \vee \chi a$ bzw. $(x) \cdot \Phi x$ bzw. $(\exists x) \cdot \Phi x$, und dann die Substitutionsregel beliebig oft, gegebenenfalls keinmal, anwendet. — Man beachte, daß nicht jedes Gebilde, das eine Formel ist, auch eine ableitbare Formel ist.

Die Modus-ponens-Regel soll unverändert bleiben, sofern man an Stelle von A und B auch Formeln zuläßt, die Zeichen der Art $(x) \cdot \Phi x$ bzw. $(\exists x) \cdot \Phi x$ bzw. Φa enthalten. Ferner soll die Formel $(x) \cdot \psi x$ eine abgeleitete Formel darstellen, wenn die Formeln: $(x) \cdot \Phi x$ und $(x) \cdot \Phi x) \, \psi x$ abgeleitete Formeln sind.

Die beiden neuen Ausgangsformeln lauten:

1. $\Phi a \cdot) \cdot (\exists x) \cdot \Phi x$,
2. $(x)\Phi x \cdot) \cdot \Phi a \cdot \Phi b$. Wir setzen für $\sim (\sim \Phi x \vee \sim \Phi y)$ den Ausdruck $\Phi x \cdot \Phi y$.

Analog wie bei dem einfachen Kalkül werden wir auch bei dem neuen vorgehen, d. h. wir werden den Formeln des neuen Kalküls ebenfalls Werttafeln zuordnen und zeigen, daß alle ableitbaren Formeln Werttafeln eines ganz bestimmten Typs besitzen, derart, daß, wenn eine Formel eine Werttafel dieses Typs besitzt, ihre Negat-Formel eine Werttafel von anderem Typ hat.

Die betreffenden Werttafeln finden wir auf Grund nachstehender Überlegungen: Wir denken uns zunächst ein Symbol der Art $\Phi \hat{z}$ sukzessiv mit den Zeichen $+$ bzw. $-$ bzw. $\times$ behaftet. Alsdann stellen wir willkürlich die nachstehenden Werttafeln (1)—(5) auf, vermittelst deren sich die Werttafel jeder Formel, die zum Kalkül gehört, sukzessiv ermitteln läßt, wobei wir die neuen Werttafeln so einrichten, daß sie für $+$ und $-$ in die alten ausarten, sofern an Stelle der Funktionsvariablen die Aussagenvariablen treten.

Diese an sich willkürliche Behaftung der Symbole der Art $\Phi \hat{z}$ läuft ersichtlich bei der üblichen inhaltlichen Interpretierung des Kalküles, die aber bei unserem Nachweise in keiner Hinsicht benutzt wird, darauf hinaus, daß eine Formel Φa als richtig bzw. als verkehrt bzw. als hinsichlich ihrer Richtigkeit oder Verkehrtheit noch nicht bestimmt gilt, wenn die Funktion $\Phi \hat{z}$ eine im *Russell*schen Sinne „immer wahre",

---

[3]) Es bezeichnen immer, wie bei *Whitehead* u. *Russell*, die Buchstaben $p, q, \ldots, w$ Aussagenvariable, die Buchstaben $\Phi, \Psi, \ldots$ Funktionsvariable, die Buchstaben $x, y, \ldots$ Individuenvariable und schließlich die Buchstaben $a, b, \ldots, 0$ Konstante.

(Zeichen: +) bzw. „immer falsche“, (Zeichen: −) bzw. „manchmal wahre und manchmal falsche“ (Zeichen: ⚹) ist. Die Werttafeln sind nun diese:

(1)

$\Phi\hat{z}$	$(x)\cdot\Phi x$
+	+
−	−
⚹	−

(2)

$\Phi\hat{z}$	$(\exists x)\cdot\Phi x$
+	+
−	−
⚹	+

(3)

$\Phi\hat{z}$	$\sim\Phi\hat{z}$
+	−
−	+
⚹	⚹

(4)

$\Phi\hat{z}$	$\psi\hat{z}$	$\Phi\hat{z}\vee\psi\hat{z}$
+	+	+
+	−	+
−	+	+
−	−	−
⚹	+	+
+	⚹	+
⚹	−	⚹
−	⚹	⚹
⚹	⚹	+ bzw. ⚹

(5)

$\Phi\hat{z}$	Φc
+	+
−	−
⚹	+ bzw. −

Entsprechend der Definition der Implikationsbeziehung findet man durch Zusammensetzung der Tafeln (3) und (4) die Tafel der Implikationsbeziehung:

(6)

$\Phi\hat{z}$	$\psi\hat{z}$	$\Phi\hat{z}\ )\ \psi\hat{z}$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+
⚹	+	+
+	⚹	⚹
⚹	−	⚹
−	⚹	+
⚹	⚹	+ bzw. ⚹

Ferner analog aus der Definition des logischen Produktes, speziell:

(7)

$\Phi\hat{z}$	$\Phi a\cdot\Phi b$
+	+
−	−
⚹	+ bzw. −

Wendet man nun diese Tafeln zur Auswertung der beiden neuen Ausgangsformeln an, so findet man, daß beide Werttafeln besitzen, in deren letzter rechtsstehender Kolonne nur Pluszeichen auftreten, und dies unbeschadet der Tatsache, daß einige der willkürlich neu eingeführten Werttafeln an einigen Stellen mehrdeutig gefaßt wurden. Wir wollen analog der früheren Bezeichnungsweise eine Werttafel mit solcher Pluszeichen-Kolonne eine Plus-Werttafel und die entsprechende Formel eine Plus-Formel nennen, und alle anderen Formeln N-Formeln.

Genau wie früher schließt man jetzt, daß eine Formel die Eigenschaft, eine Plusformel zu sein, bei Anwendung der Substitutionsregel behält. Daß fernerhin auch die erweiterte Fassung der Modus-ponens-Regel aus Plus-Formeln immer nur Plus-Formeln entstehen läßt, liegt für den ersten Fall der Erweiterung auf der Hand. Für den zweiten schließe man so: Wenn $(x)\cdot\Phi x$ wie $(x)\cdot\Phi x)\psi x$ Plus-Formeln sind, so ist sowohl dem $\Phi\hat{z}$ als auch dem $\Phi\hat{z})\psi\hat{z}$ das Zeichen + zugeordnet entsprechend der Werttafel (1). Die Benutzung der Werttafel (6) lehrt dann, daß, wenn $\Phi\hat{z}$ das Zeichen + hat und $\Phi\hat{z})\psi z$ ebenfalls, $\psi\hat{z}$ selbst das Zeichen + besitzen muß, woraus schließlich gemäß Werttafel (1) folgt, daß auch $(x)\cdot\psi x$ das Zeichen + hat. Damit sind wir nun

im Besitz einer Eigenschaft E, wie wir sie brauchen, da entsprechend den Werttafeln (1)—(3) und den nachstehenden Definitionen:

$$\sim\{(x)\cdot\Phi x\}\cdot=\cdot(\exists x)\cdot\sim\Phi x \text{ und } \sim\{(\exists x)\cdot\Phi x\}\cdot=\cdot(x)\cdot\sim\Phi x$$

gilt: Ist A eine abgeleitete, also, wie wir schon wissen, eine Plus-Formel, so muß ihre Negat-Formel $\sim A$ eine N-Formel sein. Eine Formel des Kalküls und ihre Negat-Formel können also nicht beide ableitbare Formeln sein. Der Kalkül ist mithin ein widerspruchsloser. Zu bemerken ist noch, daß auch das Vertauschungsaxiom 11,07 bzw. 8,13 in der *Whitehead-Russell*schen Numerierung die Auswertbarkeit nicht beeinträchtigt.

28. 12. 27.

Eingegangen 5. Januar 1928.

Über die Zentralachsen eines Büschels von Dynamen und ihre Beziehung zur Flächentheorie.

Von *K. Kommerell* in Tübingen.

Im 159. Band dieser Zeitschrift hat Herr Fr. *Meyer* S. 50 ff. über ein ähnliches Thema eine interessante Arbeit veröffentlicht. Der Zweck dieses Aufsatzes ist aber ein anderer als der, den Herr *Meyer* verfolgt.

Das Zylindroid spielte schon bisher bei verschiedenen flächentheoretischen Fragen eine Rolle, wie man z. B. aus dem bekannten Lehrbuch von *Scheffers* ersehen mag. Faßt man das Zylindroid nicht vom geometrischen sondern vom mechanischen Standpunkt aus auf, nämlich als den Ort der Zentralachsen eines Büschels von Dynamen, so ist jede Zylindroiderzeugende Achse eines Nullsystems und „trägt" einen Vektor, „den Parameter des Nullsystems". Es ist nun nicht uninteressant, zu sehen, daß die Erzeugenden eines Zylindroids den Fortschreitungsrichtungen in einem Flächenpunkt eineindeutig derart zugeordnet werden können, daß der Parameter der Erzeugenden gleich der Krümmung des entsprechenden Normalschnitts der Fläche ist. Man kann so von konjugierten Erzeugenden, Haupterzeugenden, Asymptotenerzeugenden usw. reden. Dabei sind konjugierte Erzeugende solche, deren Nullsysteme in Involution liegen. Die den Asymptotenrichtungen entsprechenden Erzeugenden sind solche, deren Nullsysteme in einen „speziellen" Strahlenkomplex (Treffgeraden der Erzeugenden) entartet sind. Die Asymptotenerzeugenden sind die Achsen der linearen Strahlenkongruenz, welche allen Nullsystemen des Büschels gemeinsam ist. Die Haupterzeugenden sind konjugiert und orthogonal, sie schneiden sich, und für sie erreicht der Parameter seine extremen Werte. Auch die *Euler*sche Formel findet eine entsprechende Deutung: Kurzum es ergibt sich eine vollkommene Analogie mit den Krümmungsverhältnissen in einem Flächenpunkt.

Bedient man sich statt der Linienkoordinaten, die Herr *Meyer* bevorzugt, der Vektorrechnung, so werden schleppende Rechungen vermieden. Für die Zentralachse eines Vektorsystems (Dyname, Schraube) erhält man so eine äußerst einfache Formel (1), die ich übrigens andeutungsweise schon in meiner Neubearbeitung der *Salmon-Fiedler*schen Raumgeometrie (1922) S. 272 gegeben habe. Um verständlich zu sein, schicke ich im Punkt 1. einiges voraus, was teilweise bekannt ist.

1. Vektorsystem und Nullsystem.

Vom Bezugspunkt O gehe der Vektor $\mathfrak{r}_i$ aus, dessen Spitze kurz als „Punkt $\mathfrak{r}_i$" bezeichnet werde. In ihm greife der Vektor $\mathfrak{p}_i$ an, dann ist $\mathfrak{r}_i \times \mathfrak{p}_i$ das Moment des Vektors $\mathfrak{p}_i$ für O als Bezugspunkt; dabei bedeutet $\times$ die vektorielle Multiplikation. Für $i = 1, 2, \ldots, n$ erhält man so in O zwei Vektoren

$$(1) \qquad \mathfrak{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i, \qquad \mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i \times \mathfrak{p}_i;$$

$\mathfrak{P}$ heißt der resultierende Vektor, $\mathfrak{M}$ das resultierende Moment für O; $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ heißen die

Vektorkoordinaten des Systems für O. Nimmt man als neuen Bezugspunkt O' den Punkt $\mathfrak{s}$, und ist der Punkt $\mathfrak{r}_i$ in Bezug auf O derselbe wie der Punkt $\mathfrak{r}_i'$ in Bezug auf O', so ist

$$\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{r}_i - \mathfrak{s}. \tag{2}$$

Bildet man nun für O' als Bezugspunkt die Vektorkoordinaten

$$\mathfrak{P}' = \Sigma \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{M}' = \Sigma \mathfrak{r}_i' \times \mathfrak{p}_i,$$

so findet man mit Hilfe von (1) und (2)

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - (\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}), \tag{3}$$

woraus

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{M}' = \mathfrak{P}\mathfrak{M} \tag{4}$$

folgt, wenn $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ das skalare Produkt bedeutet. Die Größen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ heißen die *Invarianten* des Vektorsystems. Deutet man die $\mathfrak{p}_i$ als Kräfte, die an einem starren System angreifen, so ist $\mathfrak{P}$ der resultierende Kraftvektor, $\mathfrak{M}$ das resultierende Kraftmoment für O und $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ nennen wir eine *Dyname*.

Nun kann man aber $\mathfrak{P}$ auch als Vektor einer Rotationsgeschwindigkeit, $\mathfrak{M}$ als Vektor einer Translationsgeschwindigkeit auffassen, wobei die Richtung von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M}$ in O die Richtung der Drehachse bzw. Translation, der Betrag $P = |\mathfrak{P}|$ bzw. $M = |\mathfrak{M}|$ die Winkelgeschwindigkeit bzw. Translationsgeschwindigkeit angibt. Es ist nämlich leicht zu zeigen, daß beim Übergang zu einem anderen Bezugspunkt $O'(\mathfrak{s})$ die Transformationsformeln (3) gelten. Denn nach der bekannten Formel von *Euler* ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ im Punkt $\mathfrak{r}$ gegeben durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{r} + \mathfrak{M}. \tag{5}$$

Geht man vermöge (2)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{s} \tag{6}$$

zu dem neuen Bezugspunkt $O'(\mathfrak{s})$ über, so folgt aus (5) und (6)

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{r}' + \{\mathfrak{M} + (\mathfrak{P} \times \mathfrak{s})\}; \tag{7}$$

durch Vergleich von (5) und (7) erhält man für O'

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - (\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}),$$

also das Transformationsgesetz (3). Hierdurch ist der bekannte Dualismus zwischen Kräften und Drehgeschwindigkeiten einerseits, Momenten und Translationsgeschwindigkeiten andererseits am prägnantesten zum Ausdruck gebracht.

Errichtet man nun in jedem Punkt $O'(\mathfrak{s})$ die Ebene ε' senkrecht zum resultierenden Moment $\mathfrak{M}'$, so ist dadurch jedem Punkt O' eine Ebene ε' zugewiesen. $\mathfrak{M}'$ hat für jede Gerade G, die durch O' geht und in ε' liegt, die Komponente Null; für die Gerade G als Achse genommen hat das Vektorsystem das Moment Null. Diese Geraden G heißen daher bekanntlich Nullinien, ε' die Nullebene des Nullpunkts O'. Die Gesamtheit der Nullpunkte, Nullebenen und Nullinien nennt man das Nullsystem. Ist $\mathfrak{r}$ ein Punkt von ε, so ist

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{s})\,\mathfrak{M}' = 0$$

oder nach (3)

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{s})\,\mathfrak{M} - (\mathfrak{r} \times \mathfrak{s})\,\mathfrak{P} = 0. \tag{8}$$

Errichtet man andererseits bei der kinematischen Auffassung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ in jedem Punkt $\mathfrak{s}$ die Ebene senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ und ist $\mathfrak{r}$ ein Punkt dieser Ebene, so hat man

$$(\mathfrak{r} - \mathfrak{s})\,\mathfrak{v} = 0,$$

wobei nach (5)

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{P} \times \mathfrak{s}) + \mathfrak{M}$$

ist. Setzt man $\mathfrak{v}$ in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man dieselbe Beziehung (8), also dasselbe Nullsystem, womit die bekannte Erzeugungsweise des Nullsystems gegeben ist. Es seien nun die Komponenten von $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{M}, \mathfrak{P}$ der Reihe nach

$$x\,y\,z;\ x'\,y'\,z',\ M_x\,M_y\,M_z;\ P_x P_y P_z,$$

dann sind die Komponenten von $\mathfrak{r} \times \mathfrak{s}$

$$y\,z' - y'\,z,\quad z\,x' - z'\,x,\quad x\,y' - x'\,y,$$

und aus (8) fließt die Gleichung

$$(9)\quad (x - x')\,M_x + (y - y')\,M_y + (z - z')\,M_z + (y'\,z - y\,z')\,P_x + (z'\,x - z\,x')\,P_y + (x'\,y - x\,y')\,P_z = 0,$$

eine bilineare Gleichung zwischen x, y, z und x', y', z', welche die Reziprozität unmittelbar erkennen läßt. Ist der Punkt $(x'\,y'\,z')$ fest, so durchläuft der veränderliche Punkt $(x\,y\,z)$ die Nullebene des Nullpunkts $(x'\,y'\,z')$, die ihn enthält. Nun sind

$$x - x',\quad y - y',\quad z - z';\quad y'\,z - y\,z',\quad z'\,x - z\,x',\quad x'\,y - x\,y'$$

die *Plücker*schen Linienkoordinaten der Geraden G, welche die Punkte $(x\,y\,z)$ und $(x'\,y'\,z')$ verbindet, also einer Nullinie, und, da die Konstanten in (9) beliebig sind, so stellt (9) die allgemeinste lineare Gleichung zwischen den sechs Linienkoordinaten dar. Das System aller Geraden G, der Nullinien des Nullsystems, heißt daher auch der lineare Strahlenkomplex.

2. Zentralachse eines Vektorsystems.

Wir zeigen nun, daß für ein Vektorsystem, in dem $\mathfrak{P} \neq 0$ ist, eine Gerade A parallel zu $\mathfrak{P}$ derart existiert, daß für einen beliebigen Bezugspunkt $O'(\mathfrak{s})$ auf A das resultierende Moment $\mathfrak{M}'$ (wie auch $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$) auf A liegt. Wir suchen also den Vektor $\mathfrak{s}$ in (3) so zu bestimmen, daß

$$(10)\qquad \mathfrak{M}' = a\mathfrak{P}$$

wird, wo a ein Skalar ist. Aus (3) und (10) folgt

$$(11)\qquad \mathfrak{s} \times \mathfrak{P} = \mathfrak{M} - a\mathfrak{P}.$$

Die rechte Seite stellt einen Vektor dar, der in der Ebene der Vektoren $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$ liegt, wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ nicht schon in derselben Geraden liegen; denn sonst wäre diese Gerade bereits die gesuchte, da für $\mathfrak{s} = \alpha\mathfrak{P}$ nach (3) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ wird. Der Vektor auf der linken Seite von (11) liegt daher auch in der Ebene $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$. Nach der Bedeutung von $\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}$ ist dies nur möglich, wenn die Ebene $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{P}$ auf der Ebene $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$ senkrecht steht. Man kann daher

$$(12)\qquad \mathfrak{s} = \lambda(\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}) + \vartheta\mathfrak{P}$$

setzen, wo λ und ϑ Skalare sind. Setzt man $\mathfrak{s}$ aus (12) in (11) ein, so folgt

$$\lambda(\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}) \times \mathfrak{P} = \mathfrak{M} - a\mathfrak{P},$$
$$\lambda\{\mathfrak{M}P^2 - \mathfrak{P}(\mathfrak{M}\mathfrak{P})\} = \mathfrak{M} - a\mathfrak{P},$$
$$\mathfrak{M}(\lambda P^2 - 1) = \mathfrak{P}\{\lambda(\mathfrak{M}\mathfrak{P}) - a\},$$

oder, da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ linear unabhängig sind,

$$\lambda P^2 - 1 = 0,\ \lambda(\mathfrak{M}\mathfrak{P}) - a = 0,$$
$$\lambda = \frac{1}{P^2},\quad a = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{P}}{P^2}.$$

Nach (10) und (12) hat man also

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}}{P^2} + \vartheta \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{M}' = \frac{(\mathfrak{M}\mathfrak{P})\mathfrak{P}}{P^2}.}$$

ϑ bleibt willkürlich. Die erste Gleichung stellt die Gerade A dar, welche die *Zentralachse des Vektorsystems* (Achse des Nullsystems, des linearen Komplexes) heißt. Der Punkt

$$\mathfrak{s}_0 = \frac{\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}}{P^2}$$

ist der Fußpunkt des vom Bezugspunkt O auf die Zentralachse gefällten Lots. Die zweite Formel (I) bestätigt die Invarianz von $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$. Macht man die Zentralachse zur z-Achse, so erhält man statt (9), da $M_x = M_y = P_x = P_y = 0$ ist,

$$(9') \qquad (z - z')M_z + (x'y - xy')P_z = 0$$

als Gleichung des Nullsystems.

Deutet man $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ als Drehvektor bzw. Translationsvektor für ein starres System, so gibt die Zentralachse die *Schraubenachse* der Bewegung. Die Größe

$$p = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{P}}{P^2},$$

„der Parameter des Nullsystems oder der Schraube" gibt (absolut genommen) das Verhältnis der Translations- zur Rotationsgeschwindigkeit bezüglich der Schraubenachse. Ist $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ positiv, so hat $\mathfrak{M}'$ dieselbe Richtung wie $\mathfrak{P}$, und das Nullsystem ist rechts gewunden. Ist $\mathfrak{M}\mathfrak{P} < 0$, so ist es links gewunden. Ist $\mathfrak{M}\mathfrak{P} = 0$, d. h.

$$M_x P_x + M_y P_y + M_z P_z = 0,$$

so ist $\mathfrak{M}' = 0$, und man hat es mit einer reinen Rotationsbewegung zu tun. Alle Punkte beschreiben Kreise und alle Nullebenen gehen durch die Zentralachse, wie auch aus (9') mit $M_z = 0$ ($\mathfrak{P} \neq 0$) folgt. Der lineare Strahlenkomplex ist ein „*spezieller*" und besteht aus allen Geraden, welche die Zentralachse treffen.

3. Büschel von Dynamen (linearen Strahlenkomplexen).

Nun seien zwei Dynamen gegeben, die für den Bezugspunkt O die Koordinaten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{M}_2$ haben mögen; sie führen zu zwei linearen Komplexen mit den Gleichungen

$$(13) \quad (x - x')M_{1x} + (y - y')M_{1y} + (z - z')M_{1z} + (y'z - yz')P_{1x} + (z'x - zx')P_{1y} + (x'y - xy')P_{1z} = 0,$$

$$(14) \quad (x - x')M_{2x} + \cdots \qquad + (x'y - xy')P_{2z} = 0.$$

Bei allgemeinen Koeffizienten $M_{1x} \ldots P_{1z}$, $M_{2x} \ldots P_{2z}$ bilden die den beiden Nullsystemen gemeinsamen Nullinien eine lineare Strahlenkongruenz, deren Gleichungen (13) und (14) sind. Der durch den Punkt $O'(x'y'z')$ gehende Kongruenzstrahl G ist die Schnittgerade der beiden Nullebenen (13) und (14) von O'; in bezug auf G als Achse haben *beide* Dynamen das Moment Null. Nun bilde man die Dyname mit den Koordinaten

$$(15) \qquad \mathfrak{P} = u\mathfrak{P}_1 + v\mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{M} = u\mathfrak{M}_1 + v\mathfrak{M}_2$$

für O, wo u und v zwei beliebige Skalare sind. Bei variablen u, v beschreiben, wie man leicht sieht, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ bezüglich in den Ebenen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ projektive Strahlenbüschel. Nach (3) hat man für den Bezugspunkt $O'(\mathfrak{s})$

$$\mathfrak{M}' = u\mathfrak{M}_1 + v\mathfrak{M}_2 - \{\mathfrak{s} \times (u\mathfrak{P}_1 + v\mathfrak{P}_2)\} = u\{\mathfrak{M}_1 - (\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}_1)\} + v\{\mathfrak{M}_2 - (\mathfrak{s} \times \mathfrak{P}_2)\},$$

$$(16) \qquad \mathfrak{M}' = u\mathfrak{M}_1' + v\mathfrak{M}_2',$$

d. h. auch in einem beliebigen Punkt O' ist das Büschel der Vektoren $\mathfrak{M}'$ projektiv zum Büschel der Vektoren $\mathfrak{M}$ in O. Da die Nullebene in O' jeweils auf dem Vektor $\mathfrak{M}'$ senkrecht steht, so beschreiben die Nullebenen in jedem Punkt O' des Raumes projektive Büschel

um den durch O' gehenden Kongruenzstrahl, der in O' auf der Ebene $\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$ senkrecht steht. Durch (15) ist ein Büschel von Dynamen oder linearen Strahlenkomplexen definiert: sie alle besitzen die Strahlen der linearen Kongruenz als Komplexstrahlen. Gibt man in (15) den Parametern u, v einmal die Werte u_1, v_1 und dann u_2, v_2, wo $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ ist, und verwendet die beiden Paare von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$, die sich nach (15) für diese Parameterwerte ergeben, zur Büschelbildung, so erhält man offenbar dasselbe Büschel. Im übrigen hängt alles nur von dem Verhältnis der Parameter u, v ab.

Zu jeder Dyname des Büschels (15) gehört nun eine Zentralachse und ein Parameter p des zugehörigen Nullsystems. Den Ort der Zentralachsen (Zylindroid) wollen wir nachher untersuchen; zuerst betrachten wir die Abhängigkeit des Parameters p von u, v. Nach der Formel (I) ist p gegeben durch

$$p = \frac{\mathfrak{M}\,\mathfrak{P}}{P^2}; \tag{16}$$

nach dem oben Gesagten ist bei positivem p das Nullsystem rechts, bei negativem links gewunden; ist $p = 0$, so ist der Komplex ein spezieller. Setzt man aus (15) für $\mathfrak{P}, \mathfrak{M}$ die Werte in (16) ein, so folgt

$$p = \frac{(u\mathfrak{M}_1 + v\mathfrak{M}_2)\,(u\,\mathfrak{P}_1 + v\,\mathfrak{P}_2)}{(u\mathfrak{P}_1 + v\mathfrak{P}_2)^2} \qquad \text{oder}$$

$$\boxed{p = \frac{u^2(\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{P}_1) + uv\,(\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{M}_2\,\mathfrak{P}_1) + v^2(\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{P}_2)}{u^2\,\mathfrak{P}_1^2 + 2uv\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 + v^2\,\mathfrak{P}_2^2}.} \tag{II}$$

Nun vergleiche man (II) mit der bekannten Formel der Flächentheorie

$$\frac{1}{R} = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}, \tag{II'}$$

welche den Krümmungsradius R für den der Richtung $\frac{du}{dv}$ entsprechenden Normalschnitt in einem Flächenpunkt gibt, so hat man den bemerkenswerten Zusammenhang, von dem in der Einleitung die Rede war. Diesen vollends herauszuheben, ist der Zweck des Folgenden. Die quadratischen Formen in den Nennern von (II) und (II') sind beide positiv definit. Den Asymptotenrichtungen

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0$$

entsprechen die speziellen Komplexe $p = 0$. Die zugehörigen Werte für $\frac{u}{v}$ ergeben sich aus

$$u^2(\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{P}_1) + uv\,(\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{M}_2\,\mathfrak{P}_1) + v^2(\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{P}_2) = 0. \tag{17}$$

Sind die beiden Wurzeln $\frac{u}{v}$ beide reell und verschieden (hyperbolisches Büschel), so sind die zugehörigen Zentralachsen die Achsen der linearen Kongruenz, d. h. die Kongruenz ist die Gesamtheit der Geraden, die beide Achsen treffen. Die beiden Achsen trennen die Zentralachsen mit positivem p von denen mit negativem p. Fallen die beiden Wurzeln von (17) zusammen (parabolisches Büschel), so existiert nur ein spezieller Komplex. Sind die Wurzeln imaginär, so sind alle Komplexe des Büschels rechts bzw. links gewunden (elliptisches Büschel). Bei alldem ist vorausgesetzt, daß die quadratischen Formen in (II) sich nicht bloß durch einen Faktor unterscheiden, daß also — flächentheoretisch gesprochen — kein Kreispunkt vorliegt.

Den beiden Systemen von Parameterwerten u_1, v_1 und u_2, v_2 mögen in (15) die Dynamen

$$(18) \qquad \mathfrak{P}^{(1)} = u_1\,\mathfrak{P}_1 + v_1\,\mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{M}^{(1)} = u_1\,\mathfrak{M}_1 + v_1\mathfrak{M}_2,$$

$$(19) \qquad \mathfrak{P}^{(2)} = u_2\,\mathfrak{P}_1 + v_2\,\mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{M}^{(2)} = u_2\,\mathfrak{M}_1 + v_2\mathfrak{M}_2$$

entsprechen. Die beiden zugehörigen Komplexe *liegen in Involution* [1]), wenn die *Simultaninvariante*

$$\mathfrak{M}^{(1)}\,\mathfrak{P}^{(2)} + \mathfrak{M}^{(2)}\,\mathfrak{P}^{(1)} = 0$$

ist, d. h.

$$(20) \quad 2u_1u_2\,(\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_1) + (u_1v_2 + u_2v_1)\,(\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{M}_2\mathfrak{P}_1) + 2v_1v_2\,(\mathfrak{M}_2\mathfrak{P}_2) = 0.$$

Flächentheoretisch entsprechen ihnen die durch die Gleichungen

$$D\,du_1du_2 + D'\,(du_1dv_2 + du_2dv_1) + D''\,dv_1dv_2 = 0$$

verbundenen Richtungen $\frac{du_1}{dv_1}$, $\frac{du_2}{dv_2}$, d. h. *konjugierte.*

Die Zentralachsen der beiden Komplexe (18) und (19) stehen aufeinander senkrecht, wenn $\mathfrak{P}^{(1)}\,\mathfrak{P}^{(2)} = 0$, d. h.

$$(21) \qquad u_1u_2\,\mathfrak{P}_1^2 + (u_1v_2 + u_2v_1)\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 + v_1v_2\,\mathfrak{P}_2^2 = 0$$

ist; ihnen entsprechen flächentheoretisch orthogonale Richtungen

$$E\,du_1du_2 + F\,(du_1dv_2 + du_2dv_1) + G\,dv_1dv_2 = 0.$$

Also orthogonalen Richtungen im Flächenpunkt entsprechen orthogonale Zentralachsen.

Nun gibt es für einen Flächenpunkt, der kein Kreispunkt ist, zwei stets reelle Richtungen, die sowohl orthogonal wie konjugiert sind — die *Hauptkrümmungsrichtungen.* Man erhält sie durch Nullsetzen der *Jacobi*schen Kovariante der beiden quadratischen Formen in (II′)

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''dv \end{vmatrix} = 0.$$

Ihnen entsprechen im Komplexbüschel zwei in Involution liegende Komplexe, deren Zentralachsen orthogonal sind — *die Hauptkomplexe.* Man hat für die Formen in (II) die entsprechende Gleichung (22) zu bilden. Für die Werte von u, v, die den Hauptkomplexen entsprechen, nimmt p in (II) Extremwerte an. Ja man kann sogar zeigen, daß die Zentralachsen der Hauptkomplexe sich schneiden.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir die Bedingung dafür, daß die Zentralachsen der beiden Dynamen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{M}_2$ sich schneiden. Nach (I) hat man als Gleichungen für die Zentralachsen

$$\mathfrak{s}_1 = \frac{\mathfrak{P}_1 \times M_1}{P_1^2} + \vartheta_1\,\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{s}_2 = \frac{\mathfrak{P}_1 \times M_2}{P_2^2} + \vartheta_2\,\mathfrak{P}_2.$$

Schneiden sich diese, so muß es zwei bestimmte Zahlen ϑ_1, ϑ_2 geben, daß $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2$ ist, also

$$(23) \qquad \frac{\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{M}_1}{P_1^2} - \frac{\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{M}_2}{P_2^2} = \vartheta_2\mathfrak{P}_2 - \vartheta_1\,\mathfrak{P}_1.$$

Sehen wir von dem Ausnahmefall [2]) ab, wo $\mathfrak{P}_2$ ein skalares Vielfaches von $\mathfrak{P}_1$ ist, so muß

---

[1]) Wegen dieses Begriffes vgl. man z. B. *Klein*, „Vorlesungen über höhere Geometrie", Springer 1926, S. 91 ff. oder *Salmon-Fiedler-Kommerell*, „Analyt. Geom. ds. Rs.", Teubner 1922, S. 300 f.

[2]) In diesem Falle bilden die Zentralachsen ein Parallelstrahlenbüschel. Man kann nämlich den Bezugspunkt O in einen Punkt der Zentralachse der Dyname $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{M}_1$ legen. Die Vektoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{P}_2$ fallen dann alle in diese. $\mathfrak{P}$ in (15) fällt dann stets in die Zentralachse, während $\mathfrak{M}$ in (15) sich in der Ebene $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ bewegt. Der Vektor $\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}$ in (I) steht auf dieser Ebene senkrecht, womit das Gesagte erwiesen ist.

der auf der linken Seite von (23) stehende Vektor in der Ebene $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ liegen, weil dies für den rechts stehenden der Fall ist. Es muß somit

$$(\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2)\left\{\frac{\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{M}_1}{P_1^2} - \frac{\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{M}_2}{P_2^2}\right\} = 0$$

sein, oder

$$\frac{P_1^2(\mathfrak{P}_2\mathfrak{M}_1) - (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)(\mathfrak{P}_1\mathfrak{M}_1)}{P_1^2} = \frac{(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)(\mathfrak{P}_2\mathfrak{M}_2) - P_2^2(\mathfrak{P}_1\mathfrak{M}_2)}{P_2^2}$$

oder

$$\mathfrak{P}_2\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{P}_1\mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)\left(\frac{\mathfrak{P}_1\mathfrak{M}_1}{P_1^2} + \frac{\mathfrak{P}_2\mathfrak{M}_2}{P_2^2}\right). \tag{24}$$

Ist umgekeht diese Bedingung erfüllt, so lassen sich ϑ_1 und ϑ_2 in (23) eindeutig bestimmen, und die Zentralachsen schneiden sich. Die Gleichung (24) ist nun insbesondere dann erfüllt, wenn

$$\mathfrak{P}_2\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{P}_1\mathfrak{M}_2 = 0, \quad \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = 0$$

ist, d. h. wenn die Komplexe in Involution liegen und ihre Zentralachsen aufeinander senkrecht stehen. Man hat daher den

Satz. *In dem allgemeinen Komplexbüschel* (15) *gibt es zwei reelle Hauptkomplexe; diese liegen in Involution, ihre Zentralachsen stehen aufeinander senkrecht und schneiden sich. Für die Achsen der Hauptkomplexe besitzt der Parameter p einen extremen Wert. Die Parameterwerte u, v für die Hauptkomplexe erhält man durch Nullsetzen der Jacobischen Kovariante der beiden quadratischen Formen in* (II).

Nun mache man die Zentralachsen der beiden Hauptkomplexe zur x- bzw. y-Achse eines räumlichen Rechtssystems und zum Bezugspunkt O den Ursprung, dann hat

(25)

$\mathfrak{P}_1$	die Komponenten	$P_1,$	$0,\ 0,$
$\mathfrak{P}_2$	„ „	$0,$	$P_2,\ 0,$
$\mathfrak{M}_1$	„ „	$M_1,$	$0,\ 0,$
$\mathfrak{M}_2$	„ „	$0,$	$M_2,\ 0,$
$u\,\mathfrak{P}_1 + v\,\mathfrak{P}_2$	„ „	$u\,P_1,$	$v\,P_2,\ 0,$
$u\mathfrak{M}_1 + v\mathfrak{M}_2$	„ „	$u\,M_1,$	$vM_2,\ 0.$

Der Fußpunkt $\mathfrak{s}$ des Lots von O auf die Zentralachse des Komplexes (15) ergibt sich nach (I) mit $\vartheta = 0$ aus

$$\mathfrak{s} = \frac{(u\mathfrak{P}_1 + v\,\mathfrak{P}_2) \times (u\mathfrak{M}_1 + v\mathfrak{M}_2)}{(u\,\mathfrak{P}_1 + v\,\mathfrak{P}_2)^2}$$

oder, die *Koordinaten* des Fußpunkts sind nach (25)

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{u\,v\,(P_1 M_2 - P_2 M_1)}{u^2 P_1^2 + v^2 P_2^2}.$$

Darum sind die Gleichungen der Zentralachse des Komplexes u, v

$$\frac{y}{x} = \frac{v\,P_2}{u\,P_1}, \quad z = \frac{u\,v\,(P_1 M_2 - P_2 M_1)}{u^2 P_1^2 + v^2 P_2^2}, \tag{26}$$

und für den Parameter p erhält man nach (II) und (25)

$$p = \frac{u^2 P_1 M_1 + v^2 P_2 M_2}{u^2 P_1^2 + v^2 P_2^2}. \tag{27}$$

Entnimmt man aus (26)

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{v P_2}{u P_1},$$

so folgt, wenn λ ein Proportionalitätsfaktor ist,

$$u = \lambda P_2 \cos\alpha, \quad v = \lambda P_1 \sin\alpha \tag{28}$$

und durch Einsetzen in (27)

$$p = \frac{P_2^2 P_1 M_1 \cos^2\alpha + P_1^2 P_2 M_2 \sin^2\alpha}{P_1^2 P_2^2} = \frac{M_1}{P_1}\cos^2\alpha + \frac{M_2}{P_2}\sin^2\alpha$$

oder die „*Eulersche Gleichung*"

$$p = p_1 \cos^2\alpha + p_2 \sin^2\alpha, \tag{29}$$

wo p_1 und p_2 die *Hauptparameter*, d. h. die Parameter der *Hauptkomplexe* sind.

Eliminiert man aus (26) u, v, so erhält man die Gleichung für den Ort aller Zentralachsen des Komplexbüschels. Es ist

$$\frac{u}{v} = \frac{P_2 x}{P_1 y}, \quad z = \frac{u}{v}\cdot\frac{P_1 M_2 - P_1 M_1}{\frac{u^2}{v^2}P_1^2 - P_2^2} = \frac{P_2 x}{P_1 y}\cdot\frac{P_1 M_2 - P_2 M_1}{P_2^2\frac{x^2}{y^2} + P_2^2}$$

oder

$$z(x^2 + y^2) = x y \cdot \frac{P_1 M_2 - P_2 M_1}{P_1 P_2} \tag{III}$$

oder

$$z(x^2 + y^2) = (p_2 - p_1) x y. \tag{III'}$$

Dies ist aber *die Gleichung eines Zylindroids.*

Das Zylindroid [1]) degeneriert in die xy-Ebene, wenn

$$P_1 M_2 - P_2 M_1 = 0$$

oder $p_1 = p_2$ ist. Dies entspricht dem oben ausgeschlossenen Ausnahmefall, wo die beiden in u, v quadratischen Formen (27) sich nur durch einen Faktor unterscheiden. Im flächentheoretischen Bilde liegt dann ein Kreispunkt vor; in der Tat gibt die Formel (29) dann $p = p_1$. Ist M_1 oder M_2, d. h. p_1 oder p_2 gleich Null, so liegt ein parabolisches Komplexbüschel vor. Statt (26) kann man noch mit Hilfe von (28)

$$x = \varrho\cos\alpha, \quad y = \varrho\sin\alpha, \quad z = \frac{p_1 - p_2}{2}\sin 2\alpha \tag{30}$$

schreiben, wo ϱ ein Parameter ist. Diese Gleichungen geben die dem Winkel α entsprechende Zentralachse und (29) den zugehörigen Wert des Parameters p. Aus diesen Gleichungen liest man die bekannte Konstruktion des Zylindroids mit Hilfe einer auf einen Kreiszylinder aufgewickelten Sinuslinie ab.

Das Zylindroid ist sozusagen ein Schulbeispiel für einseitige Flächen. In der Tat erhält man für die Richtungskosinus X, Y, Z der Flächennormalen X im Punkt (ϱ, α) des Zylindroids (30)

$$X = \frac{(p_1 - p_2)\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sqrt{\varrho^2 + (p_1 - p_2)^2\cos^2 2\alpha}}, \quad Y = \frac{(p_2 - p_1)\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sqrt{\varrho^2 + (p_1 - p_2)^2\cos^2 2\alpha}}, \tag{31}$$

$$Z = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + (p_1 - p_2)^2\cos^2 2\alpha}},$$

---

[1]) *H. Meyer* sagt in seiner oben erwähnten Arbeit S. 51 u., daß wohl von verschiedenen Autoren behauptet aber von keinem bewiesen worden sei, daß der Ort der Zentralachsen eines Büschels linearer Komplexe ein Zylindroid sei. Dem gegenüber sei z. B. auf die schöne und einwandfreie Darstellung in dem I. Teil von *Zindlers* Liniengeometrie, Leipzig 1902, verwiesen.

wo bei der Wurzel etwa immer das + Zeichen gewählt sei. Läßt man nun in (30) und (31) ϱ konstant sein, aber α stetig von α bis $\alpha + 180^0$ anwachsen, so beschreibt der Punkt (ϱ, α) des Zylindroids auf dem Kreiszylinder mit dem Radius ϱ eine Schwingung einer Sinuslinie und geht nach (30) in den Punkt $(-\varrho, \alpha)$ der Ausgangserzeugenden über. X, Y, Z sind dabei unter stetiger Änderung in $-X, -Y, Z$ übergegangen. Jetzt lasse man unter Festhaltung von α die Größe $-\varrho$ stetig durch Null gehend in $+\varrho$ übergehen, dann hat der Flächenpunkt im ganzen auf der Fläche eine geschlossene Linie zurückgelegt, wobei aber X, Y, Z das Vorzeichen gewechselt haben. Das Zylindroid ist also eine einseitige Fläche.

Tübingen, den 15. August 1928.

Eingegangen 17. August 1928.

4. Das Zylindroid eines Flächenpunkts.

Es handelt sich nun darum, für eine beliebige Fläche in jedem regulären Punkte das Zylindroid anzugeben und dasselbe zu konstruieren. Sind x, y, z die Koordinaten – Funktionen der Parameter u, v – eines Flächenpunkts und a, b, c die Koordinaten seines sphärischen Bildes, so gebe man $\mathfrak{P}_1; \mathfrak{P}_2; \mathfrak{M}_1; \mathfrak{M}_2$ der Reihe nach die Komponenten

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}; \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}; -\frac{\partial a}{\partial u}, -\frac{\partial b}{\partial u}, -\frac{\partial c}{\partial u}; -\frac{\partial a}{\partial v}, -\frac{\partial b}{\partial v}, -\frac{\partial c}{\partial v};$$

dann geht, da z. B.

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{P}_1 = -\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u}\right) = D,$$

(32)

$$\mathfrak{P}_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E$$

usw. ist, die Formel (II) in (II′) über, wenn in (II) noch für u, v die Größen du, dv gesetzt werden; dies ist gestattet, da es ja oben nur auf das Verhältnis der Parameter ankam.

Die *Dyname* (15) ist dann dargestellt durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= i\,dx + j\,dy + k\,dz = d\mathfrak{r}, && \text{(Linienelement)} \\ -\mathfrak{M} &= i\,da + j\,db + k\,dc = d\mathfrak{R}. && \text{(sphärisches Bild).} \end{aligned} \tag{33}$$

Durch (33), wo man $du : dv$ als variabel zu betrachten hat, ist für jeden Flächenpunkt (u, v) ein Dynamenbüschel und damit ein Zylindroid festgelegt. Dabei sind i, j, k drei Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen.

Aus (I) ergibt sich

$$\mathfrak{s}_0 = \frac{\mathfrak{P} \times \mathfrak{M}}{\mathfrak{P}^2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ -da & -db & -dc \end{vmatrix} : ds^2. \tag{34}$$

Nun ist [1])

$$M\,a = \begin{vmatrix} db & dc \\ dy & dz \end{vmatrix}, \quad M\,b = \begin{vmatrix} dc & da \\ dz & dx \end{vmatrix}, \quad M\,c = \begin{vmatrix} da & db \\ dx & dy \end{vmatrix}, \tag{35}$$

wo

$$M = \begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & D'du + D''dv \\ F\,du + G\,dv & Ddu + D'dv \end{vmatrix},$$

[1]) Vgl. *Kommerell*, „Allg. Theor. d. Raumkurv. u. Fl." I. Bd., Berlin u. Leipzig 1921, S. 167.

also $M = 0$ die Differentialgleichung der Krümmungslinien ist. Aus (34) und (35) folgt so

$$\mathfrak{s}_0 = \frac{M}{ds^2}\,(i\,a + j\,b + k\,c). \tag{36}$$

Nun ist aber

$$-\frac{M}{ds^2} = \frac{1}{\varrho} \tag{37}$$

die *geodätische Torsion* [1]) für die Richtung $\frac{du}{dv}$. Aus (36) geht nun hervor, daß man den Punkt $\mathfrak{s}_0$ dadurch erhält, daß man den Bezugspunkt O mit dem sphärischen Bild des Flächenpunktes verbindet und darauf die negative geodätische Torsion der Richtung $\frac{du}{dv}$ abträgt. Zieht man durch den Punkt $\mathfrak{s}_0$ die Parallele zum Vektor $\mathfrak{P}$ in (33), die natürlich auf $O\mathfrak{s}_0$ senkrecht steht, so ist diese Parallele die Zentralachse der Dyname, die $\frac{du}{dv}$ entspricht. Die Verbindungslinie von 0 mit dem sphärischen Bild des Flächenpunktes P ist also die Achse des Zylindroids für P. Legt man insbesondere den Bezugspunkt O in den Flächenpunkt P selbst, so hat man den

Satz. *Trägt man für jede Fortschreitungsrichtung in einem Flächenpunkt P auf der Normalen jeweils die negative geodätische Torsion auf und zieht durch den Endpunkt die Parallele zu der Richtung, so erhält man das zu P gehörige Zylindroid.*

Dieses Zylindroid kann als eine Art Indikatrix angesehen werden. Aus (36) folgt mit $M = 0$ $\mathfrak{s}_0 = 0$; die Hauptkrümmungsrichtungen in P sind also die Haupterzeugenden des Zylindroids. Nach (30) nimmt z ein Extremum an für $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$. Den Winkelhalbierenden der Hauptrichtungen entsprechen also Extrema der geodätischen Torsion. Man erkennt auch von neuem, daß den Asymptotenrichtungen die Achsen des linearen Skalarenkomplexes entsprechen, denn dann steht das sphärische Bild senkrecht auf dem Original, und nach (16) und (33) ist $p = 0$. Verfolgt man von Punkt zu Punkt das Zylindroid, so schließen sich eine Menge interessanter Fragen an, auf die wir aber jetzt nicht eingehen.

---

[1]) Ebendort S. 173.

Tübingen, den 3. September 1928.

Eingegangen 5. September 1928.

Die Unabhängigkeit des zweiten distributiven Gesetzes von den übrigen Axiomen der Logistik.

Von *Georg Wernick* in Kiel.

Es gilt seit langem als sicher, daß die Formel $a \cdot (b + c) \rightarrow a \cdot b + a \cdot c$ — ich bezeichne sie mit D 2 — aus den Grundgesetzen über konjunktive und disjunktive Verknüpfung [1]) nicht abgeleitet werden kann. Ein Beweis für ihre Unbeweisbarkeit findet sich bei *Peano* in seinem Formulaire [2]). *Peano*s Gedankengang ist folgender: Er belastet die Terme wie auch die Operationszeichen mit bestimmten Inhalten, indem er jene als konvexe Punktmengen, diese als elementare Beziehungen zwischen Mengen deutet, und zeigt, daß bei dieser Belastung die vorausgesetzten Axiome wahre, D 2 aber eine Behauptung ergibt, deren Falschheit unmittelbar aus der Anschauung hervorgeht; also — so schließt er — kann die Formel nicht ableitbar sein. Er setzt also voraus, daß das, was man aus wahren Sätzen in logisch einwandfreier Weise findet, gleichfalls wahr sein müsse, oder vielmehr die Umkehrung hiervon, daß nämlich eine falsche Behauptung aus wahren Sätzen nicht abgeleitet werden kann.

Man mag über die Berechtigung dieser Gedanken urteilen, wie man will, in jedem Falle bleibt das Verlangen bestehen, den Ubwb.-Beweis ohne Zuhilfenahme inhaltlicher Deutungen, auf rein formalem Wege zu führen. Die folgenden Erörterungen bringen diesen Beweis; darüber hinausgehend geben sie die vollständige Lösung des Entscheidungsproblems in bezug auf das zu Grunde gelegte axiomatische System.

I.

Dieses System weicht insofern von dem üblichen der Logistik ab, als es die Negation — richtiger gesagt, ein Zeichen, das herkömmlicherweise als Negation gedeutet wird, — nicht enthält. In der Tat ist die entgegengesetzte Stellung von D 1 [3]) und D 2 rücksichtlich ihrer Bwb. ganz unabhängig von der Einführung des Negationssymbols.

[1]) Ich werde mich zum Ausdruck dieser Gesetze der Symbole $\cdot$, $+$ und $\rightarrow$ bedienen, die aussagenmäßig als „und“ „oder“ „folglich“, mengentheoretisch als Bildung der Durchschnittsmenge, der Vereinigungsmenge und als Enthaltensein (ob im Sinne der echten Teilmenge oder der Identität bleibt unentschieden) gedeutet werden können. Aus den relativ zu diesen Deutungen giltigen Beziehungen, die unser axiomatisches System (Seite 3) formalisiert, kann wohl $a \cdot b + a \cdot c \rightarrow a \cdot (b + c)$, nicht aber D 2 abgeleitet werden. Ich bediene mich hier der in der Algebra für Produkt- und Summenbildung üblichen Zeichen deswegen, weil sie gegenüber beiden Deutungen am ehesten neutral sind. Dagegen habe ich das Zeichen $\rightarrow$ und seine sprachliche Bezeichnung als Implikation allerdings dem Aussagenkalkül entnommen, und zwar deswegen, weil einerseits die Algebra leider kein geeignetes Symbol bietet (auch das *Schröder*sche ist sehr unzweckmäßig) und weil andrerseits die Übernahme des Zeichens $>$ aus dem Klassenkalkül (die sich z. B. bei *Peano* findet) dem Irrtum Vorschub leisten könnte, als hätten unsere Sätze eine engere Beziehung zu Klassen als zu Aussagen. — Auch die gelegentliche Bezeichnung des logischen Produktes als Konjunktion, der Summe als Disjunktion entstammt dem Aussagenkalkül.

[2]) *Peano*: Formulaire de Mathématiques, Paris 1901, § 2, *3, S. 20, 21.

[3]) Darunter verstehe ich $a \cdot b + a \cdot c \rightarrow a \cdot (b + c)$.

Ich werde jedoch am Schluß zeigen, wie der größere Teil der bewiesenen Sätze auch für ein System gilt, das dieses Symbol enthält. Die zweite Abweichung von dem üblichen besteht darin, daß ich einen Teil dessen, was meistens zu den Axiomen gerechnet wird, zu Schlußregeln mache. Diese Abänderung, die den inneren Gehalt der Voraussetzungen unberührt läßt, gibt mir die Möglichkeit einer durchsichtigeren Darstellung.

Ich nehme an, daß eine endliche oder unendliche Anzahl von Termen $a, b, c, \ldots$ gegeben ist, und bezeichne mit $A, B, \ldots$ Ausdrücke, die aus diesen Termen mit Hilfe des Konjunktions- und des Disjunktionszeichens (also von $\cdot$ und $+$) aufgebaut sind. Die axiomatische Grundlage besteht dann aus 5 Axiomen (A 1—5) und 3 Schlußregeln (S I—III):

$$[\text{A 1)}\quad a \to a] \qquad \text{A 4)}\quad a \cdot b \to a$$
$$\text{A 2)}\quad a \cdot b \to b \cdot a \qquad \text{A 5)}\quad a \to a + b$$
$$\text{A 3)}\quad a + b \to b + a$$

$$\text{S I)}\ \frac{C \to A \quad C \to B}{C \to A \cdot B} \qquad \text{S II)}\ \frac{A \to C \quad B \to C}{A + B \to C} \qquad \text{S III)}\ \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C.}$$

Das Axiom A 1) ist eingeklammert, weil die meisten der folgenden Sätze auch ohne es gelten; wo es gebraucht wird, wird dieses besonders hervorgehoben werden. Übrigens ist $a \cdot b \to a \cdot b$ und $a + b \to a + b$ aus 2, III und 3, III ableitbar. — Alle auftretenden Produkte und Summen sind zweigliedrig [4]). Jeder Ausdruck ist entweder Produkt oder Summe oder Term, derart, daß je zwei dieser Begriffe sich ausschließen. Die Einsetzungsregel lautet: Es dürfen statt der Terme beliebige „Ausdrücke" eingesetzt werden. Wir können ihre Anwendung offenbar auf die Axiome einschränken.

Ich bilde jetzt den Begriff eines Ausdrucks, der i. Bez. a. vorgegebene Ausdrücke $A, B, \ldots$, die ich als seine Konstituenten bezeichne, den Typus I hat. Ausdrücke dieses Typs bezeichne ich mit $(A, B, \ldots)_{\mathrm{I}}$, $(A, B, \ldots)'_{\mathrm{I}}, \ldots$, wobei ich den Index I und die oberen Striche, wo keine Verwechslung zu befürchten ist, der Einfachheit halber weglasse. Die Entscheidung darüber, ob ein Ausdruck diesem Typ angehört, wird durch folgende drei Regeln vollzogen:

R 1 a und b. Ein Produkt ist dann und nur dann typisch, wenn seine beiden Faktoren typisch sind, oder wenn sie mit den beiden Faktoren einer Konstituenten übereinstimmen.

R 2 a und b. Eine Summe ist dann und nur dann typisch, wenn einer ihrer Summanden typisch ist, oder wenn ihre Summanden übereinstimmen mit den beiden Summanden einer Konstituenten.

R 3. Ein Term ist dann und nur dann typisch, wenn er mit einer Konstituenten übereinstimmt.

Aus R 1, 2, 3 ergibt sich als gemeinsame Folgerung, daß die Konstituenten selbst stets typisch sind. (R'.)

Mit Hilfe dieser Regeln ist für jeden eine endliche Anzahl von Operationssymbolen enthaltenden Ausdruck die Entscheidung über seine Typizität durch eine endliche Anzahl von Schritten eindeutig zu erreichen. Dieses gilt auch dann, wenn die Menge der Konstituenten transfinit ist, vorausgesetzt, daß durch eine endliche Anzahl von Schritten von jedem Ausdruck entschieden werden kann, ob er eine Konstituente ist.

Beispiele: Für die Konstituenten a, b, c sind $[(a + A) \cdot (b + B)] \cdot c + d$ und

[4]) Ich schreibe also nicht $a + b + c + d$, sondern $[(a + b) + c] + d$.

$[\{(a + A) \cdot (b + B)\} \cdot d] + c$ typisch, $[(a + A) \cdot (b + B)] \cdot d + e$ nicht typisch, für a und $b + c$ ist typisch: $a \cdot [(b + c) + D] + d$, nicht typisch: $a \cdot (b + d) + c$.

Ich nehme jetzt an, es seien sämtliche Konstituenten einfache Terme, z. B. a, b, c.[5]) Dann gilt folgender Satz:

(1) a. Wenn die linke Seite einer beweisbaren Implikation typisch ist, so ist es auch die rechte. Kürzer (mit Benutzung der Sprechweise von *Russell*): der Typ I wird vererbt.

Eine Formel, die diesem Satz widerspricht, müßte auf der linken Seite typisch, auf der rechten nicht-typisch sein. Ich bezeichne sie als illegal. Daß eine illegale Implikation nicht bewiesen werden kann, beweist man in bekannter Weise auf folgende Art: Zunächst überzeugt man sich, daß durch Einsetzung in die Axiome keine illegale Formel entstehen kann. Aber auch bei Anwendung von S I, II, III kann sich niemals aus zwei legalen Formeln eine illegale ergeben. Dabei ist zu beachten, daß die in R 1 u. R 2 (s. S. 124) hinter dem „oder" ausgedrückte Möglichkeit (also R 1 b u. R 2 b) wegfällt, da die Konstituenten weder Summanden noch Faktoren enthalten. So folgt z. B. bei Betrachtung von S II aus der Typizität von $A + B$, daß A oder B typisch ist; eine der beiden vorausgehenden Zeilen gestattet dann den Schluß, daß C typisch, also $A + B \rightarrow C$ legal ist. Ähnlich bei S I und S III. Es kann keine erste Zeile geben, die illegal ist. Damit ist Satz 1 a bewiesen.

Ich bilde nun das duale Gegenstück zum Typus I, indem ich in R 1 u. R 2 die Worte Produkt und Summe sowie Faktor und Summand vertausche. Es entsteht dann Typ II und es gilt der Satz:

(1) b. Der Typ II ist stets ererbt (d. h. wo er auf der rechten Seite auftritt, ist er bereits auf der linken vorhanden).

Mit Hilfe dieser beiden Sätze kann man bereits die Ubwb. einer großen Anzahl von Formeln zeigen. Insbesondere ist $a \rightarrow b$ ubwb., da die linke Seite in a vom Typus I ist, die rechte nicht. Bezeichnet man ein axiomatisches System, in welchem jede systemberechtigte Formel auch bwb. ist, als trivial, so ist hiermit die Nichttrivialität unseres axiomatischen Systems erwiesen[6]).

II.

Die bisherigen Sätze reichen nicht aus, die Ubwb. von D 2 zu zeigen. Um mit ihrer Hilfe den Ubwb.-Beweis zu führen, müßte man ein System von einfachen Konstituenten

---

[5]) In diesem Falle kann man die Typizität nach folgendem Verfahren bestimmen. Man ersetzt in dem fraglichen Ausdruck alle Terme, die Konstituenten sind, durch 1, alle andern durch 0, und berechnet den Ausdruck nach den Regeln $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$; $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$. Je nachdem das Ergebnis 1 oder 0 ist, ist der Ausdruck typisch oder nicht. Das Verfahren versagt aber, falls eine Konstituente etwa eine Summe ist, z. B. $a + b$. Wenn a und b nicht Konstituenten sind, ist der Wert der Summe 0, er müßte aber 1 sein, da $a + b$ Konstituente ist.

[6]) Die Frage nach Trivialität oder Nichttrivialität ist umfassender als die nach der Widerspruchsfreiheit. Letztere kann unserem System gegenüber überhaupt nicht aufgeworfen werden, da dieses die Negation nicht enthält und daher der Begriff des Widerspruchs ihm gegenüber sinnlos ist. Es wäre völlig verfehlt, zu behaupten, unser System sei widerspruchsfrei. Streng genommen kann die W.-F.-Frage überhaupt keinem einzigen formalen System gegenüber aufgeworfen werden, (wohl aber, ob $P \cdot \bar{P}$ ubwb. sei), da der W.-Begriff erst herauskommt, wenn eines der verwendeten Symbole als Negation gedeutet, also inhaltlich belastet wird. — Man kann weiter jedem formalen System gegenüber fragen, ob es vollständig sei, d. h. ob es durch Hinzufügung irgend einer nichtbwb. Formel — selbstverständlich darf sie kein neues Operationssymbol enthalten — zu den Axiomen trivial wird. (Ähnlich, aber etwas anders, bei *Hilbert u. Ackermann*: Grundzüge der theoretischen Logik, 1928, S. 33.) Unser System ist unvollständig, denn es wird durch Hinzufügung von D 2 noch immer nicht trivial. Um dieses zu begründen, muß erstens die Ubwb. von D 2 und zweitens die Nichttrivialität des erweiterten Systems gezeigt werden. Beides ergibt

angeben, für welche die linke Seite typisch, die rechte nicht-typisch ist. Nun ist die linke Seite nur in bezug auf a und b, und auf a und c typisch. Für beide Konstituentensysteme aber ist es die rechte Seite gleichfalls. Ja noch mehr: Auch wenn ich D 2 zu meinen Axiomen hinzufüge, behalten die Sätze (1) ihre Giltigkeit. Denn niemals kann durch Einsetzen beliebiger Ausdrücke A, B, C an Stelle von a, b, c aus D 2 eine illegale Formel entstehen. Dieses wäre ja nur dann möglich, wenn A und B oder A und C typisch sind, allein dann ist die rechte Seite gleichfalls typisch und die Formel doch legal [7]).

Es liegt nun der Versuch nahe, den Ubwb.-Beweis dadurch zu führen, daß unter den Konstituenten auch zusammengesetzte Ausdrücke zugelassen werden. $a \cdot (b + c)$ ist nämlich typisch in bezug auf a und $b + c$, $a \cdot b + a \cdot c$ dagegen nicht. Allein die Sätze (1) verlieren jetzt ihre Giltigkeit. Der auf S. 125 geführte Beweis versagt an der Stelle, wo bei der Betrachtung von S II aus der Typizität von $A + B$ auf die von A oder B geschlossen wurde. Haben wir als Konstituenten a und $b + c$, so ist dieser Schluß unzulässig, da nun $A + B$, falls es mit $b + c$ übereinstimmt, nach R 2b (S. 124) typisch ist, während beide Summanden nach R 3 nicht-typisch sind. Daß aber nicht nur unser Beweis versagt, sondern der Satz auch falsch ist, kann leicht durch Beispiele gezeigt werden. So ist z. B.

$b \to (b + B_1)$, $b \to (b + B_2)$, $b \to (b + B_1) \cdot (b + B_2) + c$ . . . A 5, S I, A 5, S III,
$c \to c + (b + B_1) \cdot (b + B_2) \to (b + B_1) \cdot (b + B_2) + c$ . . . . A 5, A 3, S III,
daher $b + c \to (b + B_1) \cdot (b + B_2) + c$ . . . . . S II.

Hier ist die linke Seite typisch in $b + c$, während die rechte Seite bei geeigneter Wahl von B_1 und B_2 es nicht ist.

Um trotz dieses Versagens zu einem Ubwb.-Beweis zu gelangen, untersuchen wir zunächst, welche Ausdrücke von den Faktoren der linken Seite von D 2 impliziert werden. Aus Satz (1) a schließen wir, daß a nur Ausdrücke von der Form (a)[7a]), sowie daß $b+c$, das sowohl in b als auch in c typisch ist, nur Ausdrücke implizieren kann, die gleichfalls sowohl das eine wie auch das andere sind. Ich führe für Ausdrücke dieser Art das Symbol $(b; c)$ ein, und beweise von ihm folgende Sätze:

(2) a. Wenn $(b; c)$ ein Produkt ist, so sind beide Faktoren von derselben Art, also $(b; c) \equiv (b; c) \cdot (b; c)$. [8])[9]) Die Richtigkeit geht unmittelbar aus R 1 hervor.

(2) b. Wenn $(b; c)$ eine Summe ist, so hat entweder ein Summand die gleiche Form, oder der eine Summand hat die Form (b), der andere (c). Also $(b; c) \equiv (b; c) + X$ oder $\equiv X + (b; c)$ oder $\equiv (b) + (c)$ oder $\equiv (c) + (b)$. Die Richtigkeit geht unmittelbar aus R 2 hervor. — Übrigens hat jeder Ausdruck von einer der genannten Arten nach R 2 tatsächlich auch die Form $(b; c)$.

Ich lasse jetzt ein Konstituentensystem bestehen aus a und der selbstverständlich transfiniten Menge aller Ausdrücke von der Form $(b; c)$ [10]) und bezeichne einen Ausdruck,

---

sich aus den folgenden Erörterungen. Man kann dann weiter fragen, ob das so bereicherte System vollständig ist.

[7]) Hieraus geht hervor, daß auch das um D 2 erweiterte System nicht-trivial ist.

[7a]) d. h. in a typische; s. S. 124.

[8]) Jeder Ausdruck von der Form $(b; c)$ hat auch die Form (b, c), während das Umgekehrte nicht gilt. So hat $(b + d) \cdot (c + e) + f$ die Form (b, c), aber nicht $(b; c)$, dasselbe gilt von $(b + c) \cdot (c + e) + f$ und von $(b + d) \cdot (c + e) + c$. Dagegen hat $(b + d) \cdot (b + c) + c$ sowohl die Form (b, c) als auch $(b; c)$.

[9]) Die Striche, die an die Klammern zu ihrer Unterscheidung eigentlich beigefügt werden müssen, lasse ich weg.

[10]) Die Zulässigkeit dieses Konstituentensystems beruht darauf, daß man von jedem gegebenen Ausdruck rekursiv entscheiden kann, ob er typisch ist, indem man zunächst feststellt, ob er die Form $(b; c)$

der in bezug auf dieses System vom Typus I ist, mit $(a, (\underline{b; c}))$, wobei die Unterstreichung hervorheben soll, daß das unterstrichene nicht einen Ausdruck, sondern die Elemente einer transfiniten Menge bedeutet. Ich beweise dann: (3), daß jeder Ausdruck $(a, (\underline{b; c}))$ immer nur Ausdrücke derselben Art implizieren kann, daß also die Form $(a, (\underline{b; c}))$ vererbt wird. Der Beweis von (3) wird ebenso wie der von (1) (S. 125) geführt. Zunächst überzeugt man sich, daß durch Einsetzung in die Axiome keine illegale, d. h. (3) widersprechende Formel erzielt werden kann. Bei A 1, 2, 3, 5 geht das aus R 1 u. 2 ohne weiteres hervor. Dagegen bedarf es einer genaueren Erwägung gegenüber A 4. Setze ich statt a und b die Ausdrücke A und B ein, so ist die Legalität der erhaltenen Formel ja vorhanden, falls $A \cdot B$ nach R 1 a deswegen typisch ist, weil A u. B typisch sind. Nun kann aber die Typizität von $A \cdot B$ auch darauf beruhen, daß A und B zusammmenfallen mit den Faktoren einer Konstituenten. Dieser Fall kann in der Tat eintreten, da unter den Ausdrücken $(b; c)$ sich auch Produkte befinden. Allein aus (2) a geht hervor, daß dann sowohl A als auch B selber die Form $(b; c)$ haben müssen, die rechte Seite von $A \cdot B \rightarrow A$ also sicher die Form $(b; c)$ hat. Dieser Ausdruck aber ist selber nach R′ typisch in bezug auf unser transfinites Konstituentensystem, da er ja in der Menge aller $(b; c)$ auftreten muß. — Was nun die Möglichkeit anbetrifft, aus legalen Prämissen durch Anwendung der Schlußregeln eine illegale Conclusio zu erhalten, so ist es wiederum bei S I u. S III einleuchtend, daß das unmöglich ist; eine genauere Betrachtung aber verlangt S II. Hier muß wieder der Fall ins Auge gefaßt werden, daß $A + B$ deswegen typisch ist, weil A und B zusammenfallen mit den Summanden einer Konstituenten $(b; c)$. In diesem Falle ist aber nach (2) b entweder A oder B von der Form $(b; c)$, dann ergibt eine der Prämissen, da $(b; c)$ selber die Form $(a, (\underline{b; c}))$ hat, daß auch C diese Form hat, und die Conclusio ist doch legal. Oder aber einer der Summanden hat die Form (b), der andere die Form (c), dann ergibt nach Satz (1) die eine Prämisse, daß C gleichfalls die Form (b), die andere, daß es die Form (c) hat, also, daß es von der Form $(b; c)$ ist, und die Conclusio ist gleichfalls legal. Hiermit ist gezeigt, daß $(a, (\underline{b; c}))$ immer nur einen Ausdruck der gleichen Form implizieren kann, der Satz (3) ist also bewiesen.

Wir bemerken weiter, daß die linke Seite von D 2, also $a \cdot (b + c)$, nach R 1 die Form $(a, (\underline{b; c}))$ hat, da ja $b + c$ selber zu der Menge der $(b; c)$ gehört; also ist noch zu zeigen, daß die rechte Seite, nämlich $a \cdot b + a \cdot c$ nicht diese Form hat. Wir fragen zunächst, ob $a \cdot b$ typisch ist; diese Frage ist zu verneinen, da b offenbar nicht typisch ist. Das gleiche gilt von $a \cdot c$. Die Typizität von $a \cdot b + a \cdot c$ könnte also nur noch darauf beruhen, daß $a \cdot b$ und $a \cdot c$ mit den Summanden eines $(b; c)$ zusammenfielen, also $a \cdot b + a \cdot c$ selber ein Element aus der Menge der $(b; c)$ wäre. Das ist nicht der Fall, da $a \cdot b + a \cdot c$ weder in bezug auf b, noch in bezug auf c typisch ist. Damit ist die Unbeweisbarkeit von D 2 gezeigt.

Als Vorbereitungen auf das Folgende beweisen wir noch einige Sätze, von denen die ersten die Umkehrung von bisher Bewiesenem enthalten. Wir zeigen zunächst, daß a alle Ausdrücke (a) impliziert, wenigstens dann, wenn wir zu unseren Axiomen A 1 (S. 124) hinzunehmen. Den Beweis führe ich indirekt. Angenommen, es gäbe einen Ausdruck (a), so daß $a \rightarrow (a)$ ubwb. ist. Entweder ist (a) eine Summe oder ein Produkt. Im ersten Falle sei es $\Sigma_1 + \Sigma_2$. Dann müssen $a \rightarrow \Sigma_1$ und $a \rightarrow \Sigma_2$ beide ubwb. sein, da andernfalls mit Benutzung von A 5 u. S III auch $a \rightarrow (a)$ bwb. wäre. Von den Ausdrücken Σ_1 u. Σ_2

---

hat. Im Falle der Bejahung ist er, als selbst zu den Konstituenten gehörig, typisch (s. R′), im Falle der Verneinung müssen weiter seine Summanden oder Faktoren einzeln untersucht werden.

muß aber nach R 2 einer typisch sein. Ist dagegen (a) ein Produkt $\Pi_1 \cdot \Pi_2$, so muß $a \to \Pi_1$ oder $a \to \Pi_2$ ubwb. sein, denn andernfalls könnte man mit Benutzung von S I wieder schließen $a \to (a)$. Die Ausdrücke Π_1 und Π_2 müssen aber nach R 1 beide typisch sein. Bezeichnet man die Anzahl der zum Aufbau eines Ausdrucks verwandten Konjunkts.- und Disjunktszeichen als seinen Rang, so gilt also allgemein: Falls $a \to (a)$ ubwb. ist, so gibt es einen Ausdruck $(a)'$ von niedrigerem Range als (a), so daß auch $a \to (a)'$ ubwb. ist. Durch Fortsetzung dieser Überlegung gelangt man zu einem (a) vom nullten Range, also einem Term. Der einzige in a typische Term ist aber a selbst. Also müßte im Falle der Ubwb. von $a \to (a)$ auch $a \to a$ ubwb. sein. Dieses aber trifft nicht zu, sobald ich A 1 zu meinem System hinzunehme [11]). In diesem Falle ist also $a \to (a)$ bei beliebigem (a) bwb.

Wir können jetzt zusammenfassend sagen:

(4) a impliziert einen Ausdruck dann und nur dann, wenn dieser die Form $(a)_{\mathrm{I}}$ hat.

Ebenso läßt sich zeigen:

(4) a wird von einem Ausdruck dann und nur dann impliziert, wenn dieser die Form $(a)_{\mathrm{II}}$ hat [12]).

Damit ist das Entscheidungsproblem für den allerdings bescheidenen Sonderfall, daß eine Seite der Implikation ein Term ist, gelöst [13]).

Weiter zeigen wir, daß $b + c$ jeden Ausdruck von der Form $(b; c)$ impliziert. Es gilt nämlich wegen des soeben Bewiesenen für jedes $(b; c)$: $b \to (b; c)$ und $c \to (b; c)$; daher wegen S II auch $b + c \to (b; c)$. Wieder fassen wir zusammen:

(5) $b + c$ impliziert einen Ausdruck dann und nur dann, wenn dieser die Form $(b; c)$ hat.

Das duale Gegenstück kann übergangen werden.

Drittens zeige ich, daß $a \cdot (b + c)$ jeden Ausdruck von der Form $(a, \underline{(b; c)})$ impliziert. Der Beweis wird ebenso wie der des Satzes (4) geführt, nämlich auf indirektem Wege, indem man den Rang der rechten Seite immer mehr erniedrigt, wobei bei der Feststellung des Ranges die im Innern eines $(b; c)$ enthaltenen Operationszeichen nicht mitgezählt werden. Man erkennt dann, daß, mag in der als ubwb. angenommenen Formel $a \cdot (b + c) \to (a, \underline{(b; c)})$ die rechte Seite ein Produkt aus zwei typischen Faktoren, oder eine Summe mit einem typischen Summanden, oder endlich eine Konstituente $(b; c)$ sein, schließlich eine der Formeln $a \cdot (b + c) \to (b; c)$ oder $a \cdot (b + c) \to a$ ubwb. sein müßte, während doch beide mit Hilfe von (5) und A 4 ohne weiteres zu beweisen sind. — Also dürfen wir weiter behaupten:

(6) $a \cdot (b + c)$ impliziert einen Ausdruck dann und nur dann, wenn er die Form $(a, \underline{(b; c)})$ hat.

Endlich gilt der Satz:

(7) $a \cdot (b + c)$ impliziert eine Summe $\Sigma_1 + \Sigma_2$ dann und nur dann, wenn $a \cdot (b + c)$ bereits einen Summanden, oder wenn $b + c$ bereits die Summe impliziert.

Daß in den genannten Fällen $a \cdot (b + c)$ tatsächlich die Summe impliziert, geht ohne weiteres aus A 5, 4 und S III hervor. Um aber zu zeigen, daß nur in diesen Fällen

---

[11]) Daß diese Hinzunahme für die Giltigkeit des Satzes nötig ist, erkennt man auch daran, daß ohne sie $a \to a \cdot a$, wo die rechte Seite typisch ist, ubwb. ist.

[12]) Bezeichnung siehe S. 125.

[13]) Ein einfaches Beispiel bietet die Formel $a \longleftrightarrow a + a \cdot b$. In der Tat hat $a + a \cdot b$ sowohl die Form $(a)_{\mathrm{I}}$ als auch $(a)_{\mathrm{II}}$.

die Implikation bwb. sein könne, gehen wir davon aus, daß nach Satz (3) $\Sigma_1 + \Sigma_2$ die Form $(a, (\underline{b; c}))$ haben muß. Ist diese Summe deswegen typisch, weil ein Summand, z. B. Σ_1, typisch ist, so impliziert ja nach (6) $a \cdot (b + c)$ diesen Summanden, und es ist gezeigt, daß von den beiden in (7) offen gelassenen Möglichkeiten die erste zutrifft. Nun kann aber $\Sigma_1 + \Sigma_2$ auch deshalb typisch sein, weil $\Sigma_1 + \Sigma_2$ mit einer Konstituenten $(b; c)$ übereinstimmt; in diesem Falle aber gilt $b + c \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2$ (nach Satz (5)), und die zweite Möglichkeit trifft zu. Damit ist auch (7) bewiesen.

Mit Benutzung von (7) kann man die Ubwb. von D 2 kürzer beweisen, als es auf S. 127 geschehen ist. Wenn nämlich $a \cdot (b + c) \rightarrow a \cdot b + a \cdot c$ beweisbar sein soll, so müßte bwb. sein: $a \cdot (b + c) \rightarrow a \cdot b$ oder $a \cdot (b + c) \rightarrow a \cdot c$ oder $b + c \rightarrow a \cdot b + a \cdot c$. Daß keiner dieser Fälle vorliegen kann, läßt sich bereits aus Satz (1) a (s. S. 125) schließen.

III.

Wir wollen nun die allgemeine Lösung des Entscheidungsproblems in bezug auf unser axiomatisches System geben. Diese Lösung liegt in folgenden drei Sätzen:

(8) a. Ein Ausdruck impliziert ein Produkt dann und nur dann, wenn er jeden Faktor impliziert.

(8) b. Eine Summe impliziert einen Ausdruck dann und nur dann, wenn jeder Summand ihn impliziert.

(8) c. Ein Produkt impliziert eine Summe dann und nur dann, wenn es bereits einen Summanden, oder wenn bereits ein Faktor die Summe impliziert.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man den Rang der Implikation, deren Bwb. zu entscheiden ist, mindestens auf einer Seite herabdrücken. Man gelangt dann schließlich zu Formeln, bei denen die linke oder die rechte Seite ein Term ist. Für diese Formeln aber wird die Entscheidung durch Satz (4) geliefert. Also ist die Entscheidung durch eine endliche Anzahl von Schritten gewährleistet.

Ehe wir zum Beweise der Sätze (8) schreiten, wollen wir die Methode durch Beispiele erläutern. Ich wähle dazu die *Schröder*sche Formel

$$(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \leftrightarrow a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a.^{13a})$$

Ist zunächst $(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \rightarrow a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ beweisbar? Wäre es bwb., so müßte nach (8) c

$$(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \rightarrow a \cdot b$$

oder $(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \rightarrow b \cdot c$

oder $(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \rightarrow a \cdot c$

oder $a + b \rightarrow a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$

oder $b + c \rightarrow a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$

oder $c + a \rightarrow a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$

bwb. sein. Es genügt, wenn wir die erste und vierte Zeile weiter untersuchen; wäre Zeile 1) bwb., so müßte nach (8) a

$$(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \rightarrow a$$

bwb. sein. Es ist aber nicht bwb. nach (4) b. Wäre aber

$$a + b \rightarrow a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$$

[13a]) Ich schreibe hier und auch später der Kürze halber dreigliedrige Ausdrücke, also $a + b + c$ statt $(a + b) + c$ usw. Dieses ist um so weniger bedenklich, als aus dem sogleich zu Beweisenden die Giltigkeit des assoziativen Gesetzes hervorgeht. Auch die Regeln (8) können offenbar auf mehrgliedrige Ausdrücke bezogen werden.

bwb., so müßte nach (8) b

$$a \to a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$$

bwb. sein. Es ist aber nicht bwb. nach (4) a.

Also ist die fragliche Formel nicht beweisbar.

Ebenso untersuchen wir

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a \to (a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a).$$

Im Falle der Bwb. muß nach (8) b sein

$$a \cdot b \to (a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a),$$

ebenso für die anderen Summanden. Dieses verlangt nach (8) a

$$a \cdot b \to a + b,\ a \cdot b \to b + c,\ a \cdot b \to c + a,$$

hierzu genügt nach (8) c

$$b \to a + b,\quad b \to b + c,\quad a \to c + a.$$

Alle drei Formeln sind bwb. nach Satz (4); also ist auch die fragliche Formel bwb. Da jede der Entscheidungen wegen des „dann und nur dann" auch rückwärts verfolgt werden kann, liefert die Entscheidung, falls sie zu Gunsten der Bwb. ausfällt, gleichzeitig den Gang des Beweises.

Wir gehen jetzt an den Beweis der Sätze 8. (8) a folgt im ersten Teil unmittelbar aus S I, im zweiten aus A 4 und S III; (8) b im ersten Teil aus S II, im zweiten aus A 5 und S III; (8) c im ersten Teil aus A 5, S III, A 4, S III. Schwierigkeit macht nur der zweite, mit „nur dann" eingeleitete Teil von (8) c. Ich will den Beweis an dem nicht zu einfach gewählten Beispiel $[(a \cdot b + c \cdot d) \cdot (e \cdot f + g \cdot h)] \cdot i$ andeutungsweise durchführen; man erkennt dann, daß es in jedem Falle ebenso geht. Ich beweise erstens, daß die Form $((\underline{a, b; c, d}), (\underline{e, f; g, h}), i)$ vererbt wird. (Hier besteht also das Konstituentensystem aus den Elementen zweier transfiniter Mengen und einem Term). Der Beweis wird genau so wie der entsprechende für Satz (7) auf S. 128/9 geführt. Um die Möglichkeit auszuschließen, daß durch Einsetzen in A 4 eine illegale Formel entsteht, ist zu beachten, daß, wenn $(a, b; c, d)$ (d. h. ein Ausdruck, der sowohl in a und b, als auch in c und d typisch ist) ein Produkt ist, jeder Faktor von derselben Art sein muß (vgl. (2) a); um auszuschließen, daß vermöge S II aus zwei legalen Formeln eine illegale entsteht, ist zu beachten, daß wenn $(a, b; c, d)$ eine Summe ist, entweder der eine Summand von derselben Art, oder der eine Summand von der Form (a, b), der andere von der Form (c, d) sein muß (vgl. (2) b). Man überzeugt sich dann zweitens davon, daß $[(a \cdot b + c \cdot d) \cdot (e \cdot f + g \cdot h)] \cdot i$ selbst zu den typischen Ausdrücken gehört, da der zweite Faktor, wie auch die Faktoren des ersten Faktors sämtlich Konstituenten sind. Folglich kann der eben genannte Ausdruck nur Ausdrücke von der behandelten Form implizieren. Man zeigt dann drittens, daß, er alle Ausdrücke dieser Form tatsächlich impliziert (vgl. S. 128). Nun nehmen wir an, daß einer der implizierten Ausdrücke eine Summe ist. Dann liegen zwei Möglichkeiten vor: Einer der Summanden ist typisch, dann impliziert unser Produkt diesen Summanden, oder aber die Summe fällt mit einer der Konstituenten, die einer der transfiniten Mengen angehören, zusammen; in diesem Falle impliziert bereits der in [ ] geschlossene Faktor diese Summe.

Zum Schlusse noch eine allgemeine Bemerkung. — Es ist an unserer Lösung des Entscheidungsproblems bemerkenswert, daß sie nirgends die — im übrigen aus unseren Sätzen hervorgehende — Nichttrivialität des Systems benutzt, sondern lediglich die Struktur der Ausdrücke berücksichtigt. Die Erfassung dieser Struktur war durchgehend das Ziel der Untersuchung.

IV.

Wir wollen endlich die Erweiterungsmöglichkeiten und die Grenzen unseres Verfahrens ins Auge fassen. Wir erweitern zunächst die Einsetzungsregel (s. S. 124) dahin, daß auch Implikationen an Stelle der Terme eingesetzt werden dürfen und fragen, ob auch jetzt der Ubwb.-Beweis in Kraft bleibt. Das ist in der Tat der Fall. Wir erklären zunächst:

R 4. Eine Implikation ist dann und nur dann typisch, wenn sie mit einer Konstituenten übereinstimmt.

Die Typizität einer Implikation kommt also nur in Frage, wenn auch Implikationen als Konstituenten zugelassen werden. Tun wir dieses, so gilt Satz (1) einschließlich seines Beweises ganz unverändert. Überhaupt spielen dann in unseren Sätzen Implikationen, deren Seiten durchaus nicht einfache Terme zu sein brauchen, dieselbe Rolle wie einfache Terme. Der ganze Ubwb.-Beweis sowie die Lösung des Entscheidungsproblems gelten ganz unverändert, nur muß, damit diese vollständig sei, zu Satz (4) hinzugefügt werden: „Dasselbe gilt für Implikationen".

Wir wollen zweitens unser axiomatisches System dadurch erweitern, daß wir die Hauptgesetze über Negationen hinzufügen. Es sind das die Axiome [14]):

N 1 $a + \bar{a} \to b + \bar{b}$

N 2 $a \cdot \bar{a} \to b \cdot \bar{b}$

N 3 $\overline{a \cdot b} \leftrightarrow \bar{a} + \bar{b}$

N 4 $\overline{a + b} \leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b}$

N 5 $\bar{\bar{a}} \leftrightarrow a$

und die Schlußregel

SN IV $\dfrac{A \to B}{\bar{B} \to \bar{A}.}$

Wir definieren zunächst:

$\bar{A}$ ist typisch oder nicht-typisch, je nachdem A nicht-typisch oder typisch ist. Dann behält wiederum Satz (1) seine Giltigkeit, falls das Konstituentensystem aus einfachen Termen und Implikationen besteht. Auch jetzt können wir uns überzeugen, daß weder durch Einsetzen in die Axiome noch durch Anwendung der Schlußregeln eine illegale Formel entstehen kann. So sind z. B. bei beliebiger Einsetzung in N 1 stets beide Seiten typisch, bei Einsetzung in N 2 stets beide Seiten nicht-typisch, usw. Ebenso verläuft der weitere Gang des Ubwb.-Beweises in bisheriger Weise. Dagegen versagen unsere Sätze über das Entscheidungsverfahren, und zwar an der Stelle auf S. 128, wo wir annehmen, daß der einzige in a typische Ausdruck, der weder ein Konjunktions- noch Disjunktionszeichen enthält, a selber ist. Das trifft hier nicht mehr zu, wie der Ausdruck $\bar{b}$ zeigt, der in a typisch ist. Demgemäß hört der Satz (4) auf, richtig zu sein (Gegenbeispiel $a \to \bar{b}$ ist ubwb. [15])), und unser Entscheidungsverfahren versagt.

Endlich sei die Frage aufgeworfen, ob der hier entwickelte und angewandte Begriff des Typus nicht auch benutzt werden kann, um das Entscheidungsproblem gegenüber dem um D 2 bereicherten axiomatischen System zu lösen. Es ist dieses in der Tat der Fall. Wir fügen D 2 zu dem System auf S. 124 hinzu, schließen also die Einsetzbarkeit von Implikationen, sowie die Negation aus. Zur Vorbereitung beweisen wir, daß das Produkt $a \cdot b \cdot c \cdots$ jeden Ausdruck $(a, b, c, \ldots)_{\mathrm{I}}$ impliziert. Der Beweis, der übrigens auch unab-

---

[14]) Die in diesem Zusammenhang belanglose Frage der Unabhängigkeit bleibt unerörtert.

[15]) Daß $a \to \bar{b}$ ubwb. ist, geht aus Satz (1) mit formaler Strenge hervor, wenn wir a, b als Konstituenten nehmen. Daß $\bar{a} \to b$ ubwb. ist, zeigen wir mit c (oder einem anderen von a und b verschiedenen Term), daß $\bar{a} \to \bar{b}$ ubwb. ist, mit b als Konstituenten.

hängig von der Hinzunahme von D 2 gilt, erfolgt wieder indirekt durch Erniedrigung des Ranges der rechten Seite. Führt man den Gedanken durch, so erkennt man, daß, wenn die Implikation ubwb. wäre, auch ubwb. sein müßte, daß das Produkt einen seiner Faktoren impliziert, während dieses doch nach A 4 ohne weiteres bwb. ist. Ferner gilt unter Voraussetzung von D 2, daß, falls eine Seite einer Implikation die Form $A \cdot (B + C)$ hat, und wir sie durch $A \cdot B + A \cdot C$ ersetzen, an dem Beweisbarkeitscharakter der Implikation nichts geändert wird. Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

Falls die Implikation $A \rightarrow B$ (A und B enthalten nur Konjunktions- und Disjunktionszeichen) so beschaffen ist, daß für jedes aus einfachen Termen bestehende Konstituentensystem, für das A typisch ist, B es gleichfalls ist, so ist $A \rightarrow B$ bwb. Der Satz ergibt sich aus dem eben bewiesenen ohne weiteres, falls A nur Konjunktionszeichen enthält, da in diesem Falle das einzige System, für das A typisch ist, die Menge aller Faktoren ist, und, weil B für dieses System nach Voraussetzung auch typisch sein muß, $A \rightarrow B$ bwb. ist. Für den Fall, daß auch Disjunktionszeichen auftreten, führe ich den Beweis wieder indirekt. Ich zeige nämlich, daß, falls $A \rightarrow B$ unter den angegebenen Bedingungen ubwb. wäre, es einen Ausdruck A' von niedrigerem disjunktivem Range als A (d. h. weniger Disjunktionszeichen als A enthaltend) geben müßte, derart, daß $A' \rightarrow B$ gleichfalls ubwb. ist, und B für alle einfachen Konstituentensysteme, für die A' typisch ist, es gleichfalls ist. Ich unterscheide wieder die Fälle, daß A eine Summe oder ein Produkt ist. Ist im ersteren Falle $A \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2$, so muß wegen S II $\Sigma_1 \rightarrow B$ oder $\Sigma_2 \rightarrow B$, z. B. $\Sigma_1 \rightarrow B$ ubwb. sein. Jedes Konstituentensystem, für das Σ_1 typisch ist, macht aber auch A und daher nach Voraussetzung auch B typisch. Also gilt für diesen Fall unsere Behauptung. Falls aber A ein Produkt ist, so greife ich unter den Faktoren einen heraus, der eine Summe ist, und fasse die anderen Faktoren zusammen. Es ist leicht zu zeigen, daß hierdurch an der Bwb. nichts geändert wird, da das assoziative Gesetz selbst bwb. ist. Dann ist $\Pi \cdot (\Sigma_1 + \Sigma_2) \rightarrow B$ ubwb., und nach der oben gemachten Bemerkung $\Pi \cdot \Sigma_1 + \Pi \cdot \Sigma_2 \rightarrow B$ gleichfalls ubwb. Da nun $\Pi \cdot \Sigma_1 + \Pi \cdot \Sigma_2$ für dieselben Konstituentensysteme wie $\Pi \cdot (\Sigma_1 + \Sigma_2)$ typisch ist, so ist der Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt. So erniedrigen wir den disjunktiven Rang der linken Seite auf null, und würden ein Produkt erhalten, das einen Ausdruck, der für das aus seinen Faktoren bestehende Konstituentensystem typisch ist, nicht implizieren würde, was nach dem Vorbereitungssatz (S. 131 unten) unmöglich ist. Für den Fall einer Implikation, deren Seiten nur Konjunktions- und Disjunktionszeichen enthalten, wird also das Entscheidungsproblem durch folgenden Satz gelöst:

Eine Implikation der genannten Art ist dann und nur dann bwb., wenn für jedes aus Termen bestehende Konstituentensystem, für welches die linke Seite typisch ist, die rechte Seite es gleichfalls ist.

Man darf nicht daran Anstoß nehmen, daß die Anzahl der Konstituentensysteme transfinit zu sein scheint, denn es kommen nur solche in Betracht, die die in den Ausdrücken auftretenden Terme enthalten. Ist diese Anzahl gleich N, so brauchen höchstens $2^N - 1$ Systeme berücksichtigt zu werden.

Als Beispiel wollen wir die Bwb. der verallgemeinerten *Schröder*schen Formel

$$(a + b + c) \cdot (b + c + d) \cdot (c + d + a) \cdot (d + a + b) \longleftrightarrow a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d + c \cdot d$$

zeigen. In der Tat ist die linke Seite typisch für alle aus mindestens zwei Termen bestehenden Systeme und nur für diese. Dasselbe gilt aber auch für die rechte Seite.

Damit ist die Giltigkeit der doppelten Implikation gezeigt. (Übrigens läßt sich die Richtigkeit der Formel in bekannter Weise auch durch sogenanntes Ausmultiplizieren und Anwendung des Absorptionsgesetzes zeigen).

Wir wollen jetzt beweisen, daß dieselbe Entscheidungsregel auch dann giltig ist, wenn wir die Axiome und die Schlußregel der Negation (s. S. 131) hinzunehmen. Ich nenne eine Implikation, deren rechte Seite für alle Konstituentensysteme, für die die linke Seite typisch ist, es gleichfalls ist, in Ermangelung einer besseren Bezeichnung durchaus hereditär, und zeige, daß jede durchaus hereditäre Formel bwb. ist. Dem Beweis liegen die Tatsachen zu Grunde, daß durch Anwendung der Formeln $a \cdot (b + c) \leftrightarrow a \cdot b + a \cdot c$, $a + b \cdot c \leftrightarrow (a + b) \cdot (a + c)$, sowie durch Ausführung von Negierungen nach N 3 und N 4 (S. 131) an der Beweisbarkeit einer Formel nichts geändert wird; ebenso wird aber, wie man gleichfalls leicht erkennt, durch diese Abänderungen nichts geändert an dem Bereich der Konstituentensysteme, für die ein Ausdruck typisch ist. Wir nehmen nun an der als durchaus hereditär und als ubwb. vorausgesetzten Formel $A \rightarrow B$ die genannten Umformungen derart vor, daß die linke Seite eine disjunktive, die rechte eine konjunktive Normalform wird. Die dann entstehende Formel schreiben wir:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots \rightarrow \Pi_1 \cdot \Pi_2 \ldots, \tag{9}$$

wo die Σ Produkte aus Termen und deren Negierungen, und die Π entsprechende Summen sind. Auch diese Formel muß durchaus hereditär und ubwb. sein. Das gleiche gilt aber auch von mindestens einer der Formeln $\Sigma_i \rightarrow \Pi_k$. Denn wären alle diese Formeln bwb., so wäre mit Hilfe von S I, II, III (s. S. 124) auch (9) bwb.; andrerseits ist für jedes Konstituentensystem, für das Σ_i typisch ist, auch $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots$, daher auch $\Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdots$, daher auch Π_k typisch. Ich schreibe jetzt $\Sigma_i \rightarrow \Pi_k$ genauer in der Form

$$a_1 a_2 \cdots \bar{b}_1 \bar{b}_2 \cdots \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 + \cdots \tag{10}$$

Es müssen hier die Mengen der b und der β elementenfremd sein, denn stimmte ein β mit einem b überein, so wäre (10) mit Hilfe von A 4, A 5, S III bwb. Dann ist die linke Seite von 10 in bezug auf das Konstituentensystem, das aus den a und β besteht[16]), typisch, also muß es wegen des durchaus hereditären Charakters der Formel die rechte Seite gleichfalls sein, und es muß auch wegen R 2 a ein α oder ein $\bar{\beta}$ typisch sein. Bei den $\bar{\beta}$ ist dieses nicht der Fall, da alle β Konstituenten sind, also kann die Typizität der rechten Seite nur darauf beruhen, daß ein α mit einem a oder mit einem β übereinstimmt. Im ersten Fall läßt sich aber die Formel wieder beweisen mit Hilfe von A 4, 5, S III, im zweiten Falle mit Hilfe von N 1, A 5, S III, aus denen hervorgeht $A \rightarrow \bar{\beta} + \beta + C$. Also ist der durchaus hereditäre Charakter einer Formel mit ihrer Ubwb. nicht vereinbar.

Beispiel: Wir fragen nach der Bwb. der Formel $a \cdot b \rightarrow ac + b\bar{c}$. Die linke Seite ist typisch für die Systeme a, b und a, b, c; für diese ist es aber auch die rechte Seite, also ist die Implikation bwb. [17]). Die umgekehrte ist dagegen ubw. wegen des Systems a, c.

Das hier entwickelte Verfahren berührt sich offenbar mit anderen bekannten Gedankengängen; in seiner streng formalen Begründung, die weder von Aussagen noch von Klassen etwas weiß, noch auch des Negationssymboles bedarf, wo dieses nicht in den fraglichen Zeilen bereits vorhanden ist, dürfte aber doch ein neues Moment liegen. — Will man unseren Gedankengang übertragen auf das übliche axiomatische System, in welchem unsere Schlußregeln durch Axiome ersetzt werden, und als einzige Schlußregel der „ponendo

---

[16]) Dieses Konstituentensystem kann auch leer sein. An der Giltigkeit unserer Schlüsse wird dadurch nichts geändert.

[17]) Der Beweis geht über die Formel $a \cdot b \rightarrow (a + b) \cdot (c + b) \cdot (a + \bar{c}) \cdot (c + \bar{c})$.

ponens“ übrig bleibt, in denen ferner auch Zeilen auftreten können, welche Produkte oder Summen sind, so bedarf es noch einer neuen Definition der Typizität einer Implikation, die zu lauten hat: Eine Implikation ist dann und nur dann typisch, wenn die linke Seite nicht-typisch oder beide Seiten typisch sind. Es läßt sich dann wahrscheinlich auf rein formalem Wege der Satz beweisen: Eine Zeile ist dann und nur dann ableitbar wenn sie für jedes aus einfachen Termen bestehende Konstituentensystem typisch ist.

Nachweis der bewiesenen Sätze:

(1) Seite 125, (2) S. 126, (3) S. 127, (4) S. 128, (5) S. 128, (6) S. 128, (7) S. 128, (8) S. 129.

Eingegangen 3. Juli 1928.

Bestimmung der genauen Konstanten in einem Koebeschen Hilfssatz.

Von *Edmund Landau* in Göttingen.

Einer der Koebeschen Beweise seines Verzerrungssatzes stützte sich auf den **Hilfssatz** [1]**:** *Es sei*

$$f(x) = \frac{1}{x} + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

für $0 < |x| \leqq 1$ *regulär*;

$$M(\varrho) = \operatorname*{Max}_{|x| = \varrho} |f(x)|$$

falle für $0 < \varrho \leqq 1$. *Dann ist*

$$M(1) = M \leqq P,$$

wo P *eine Weltkonstante ist.*

Koebes Beweis gibt $P = 2(1 + \sqrt{2})$, und ein schärferes P kommt in der Literatur nicht vor. Ich werde nun u. a. das kleinstmögliche P bestimmen und $P = 3$ finden. Ich beweise nämlich den folgenden

Satz: *Es sei*

$$f(x) = \frac{1}{x} + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

für $0 < |x| \leqq 1$ *regulär,*

$$M(\varrho) = \operatorname*{Max}_{|x| = \varrho} |f(x)| \qquad \text{für} \quad 0 < \varrho \leqq 1,$$

$$M(1) = M.$$

Es sei entweder

$$M(\varrho) \quad \text{für} \quad 0 < \varrho \leqq 1 \quad \text{monoton fallend}$$

oder auch nur

$$M(\varrho) \quad \text{für} \quad 0 < \varrho \leqq 1 \quad \text{monoton nicht steigend}$$

oder auch nur

$$M(\varrho) \geqq M \quad \text{für} \quad 0 < \varrho < 1$$

oder auch nur bei $\varrho \to 1$ (von links)

$$M(\varrho) \geqq M - o(1 - \varrho)$$

(d. h. die bekanntlich vorhandene linke Ableitung $M'_-(1) \leqq 0$).

Dann ist

1. $M \leqq 3$,
2. $|b_1| \leqq \frac{8}{3}$,
3. *bei jeder der* 4 *Annahmen* 3 *bzw.* $\frac{8}{3}$ *die kleinstmögliche Konstante.*

---

[1]) *Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven*, II [Mathematische Annalen, Bd. **69** (1910), S. 1—81], S. 46—47.

Beweis: 1. Für

$$\varphi(x) = x f(x) = 1 + b_1 x^2 + \cdots$$

gilt bei $\varrho \to 1$ (von links)

$$\operatorname*{Max}_{|x| \leqq \varrho} |\varphi(x)| = \varrho M(\varrho) \geqq \varrho (M - o(1-\varrho)) = \varrho M - o(1-\varrho)$$

und

$$|\varphi(x)| \leqq M \qquad \text{für} \quad |x| \leqq 1.$$

Ist $\varphi(x)$ konstant 1, so ist $M = 1 \leqq 3$, $|b_1| = 0 \leqq \frac{8}{3}$.
Anderenfalls ist $M > 1$ und

$$\psi(x) = \frac{\dfrac{\varphi(x)}{M} - \dfrac{1}{M}}{1 - \dfrac{\varphi(x)}{M} \cdot \dfrac{1}{M}} = \frac{b_1 M}{M^2 - 1} x^2 + \cdots$$

für $|x| \leqq 1$ regulär und absolut $\leqq 1$, also absolut $\leqq |x|^2$. Aus

$$\varphi(x) = M \frac{1 + M\psi(x)}{M + \psi(x)}$$

folgt also

$$\varrho M - o(1-\varrho) \leqq \operatorname*{Max}_{|x| \leqq \varrho} |\varphi(x)| \leqq M \frac{1 + M\varrho^2}{M + \varrho^2},$$

$$-o(1-\varrho) \leqq M \frac{1 + \varrho + \varrho^2 - \varrho M}{M + \varrho^2} (1-\varrho) = M \frac{3 - M}{M + 1} (1-\varrho) + o(1-\varrho),$$

$$-o(1) \leqq M \frac{3 - M}{M + 1} + o(1),$$

$$M \leqq 3.$$

2. Aus

$$\left| \frac{b_1 M}{M^2 - 1} \right| \leqq 1$$

folgt nunmehr

$$|b_1| \leqq M - \frac{1}{M} \leqq \frac{8}{3}.$$

3. $$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + 3x^2}{1 + \dfrac{x^2}{3}} = \frac{1}{x} + \frac{8}{3} x + \cdots$$

ist für $0 < |x| \leqq 1$ regulär und $M(1) = 3$. Ferner fällt $M(\varrho)$ für $0 < \varrho \leqq 1$ wegen

$$M(\varrho) = \frac{3}{\varrho} \cdot \frac{1 + 3\varrho^2}{3 + \varrho^2},$$

$$M'(\varrho) = -\frac{9(1-\varrho^2)^2}{(3\varrho + \varrho^3)^2}.$$

Göttingen, den 6. Juni 1929.

Eingegangen 8. Juni 1929.